Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 8

МАТЕМАТИКА

Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ

К ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 I 1948)

Эта заметка по обозначениям и терминологии примыкает к ([1], [2]) Здесь будут кратко (без доказательств) изложены новые результаты, относящиеся к однородным (по времени) ветвящимся случайным процессам с дискретным временем. Аналогичные задачи для схемы с непрерывным временем сводятся к задачам с дискретным временем при помощи метода, указанного в ([2]).

Рассматриваются частицы n типов

$$T_1,\ T_2, \ldots,\ T_n. \tag{1}$$

В соответствии с ([1], [2])

$$P_k^{\alpha}(t) = P(T_k \to \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \ldots + \alpha_n T_n | t) \tag{2}$$

обозначает вероятность того, что частица типа T_k через t поколений (t пробегает значения 1, 2, 3, ...) превратится в совокупность, состоящую из $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ частиц типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Как и в ([1], [2]), положим

$$F_k(t,\ x) = \sum_{\alpha} P_k^{\alpha}(t)\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}. \tag{3}$$

Далее основную роль будут играть производящие функции

$$f_k(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = f_k(x) = F_k(1;\ x) = \sum_{\alpha} p_k^{\alpha} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \tag{4}$$

где $p_k^{\alpha} = P_k^{\alpha}(1)$. Из основного функционального уравнения ([1]) получим

$$F_k(t+1;\ x) = f_k\{F_1(t; x),\ F_2(t; x),\ \ldots,\ F_n(t;\ x)\} = f_k^{(t+1)}(x), \tag{5}$$

т. е. $F_k(t;\ x)$ являются t-ми итерациями функций $f_k(x)$, которые мы обозначаем через $f_k^{(t)}(x)$. Таким образом, производящие функции

$$f_1(x_1\ x_2, \ldots, x_n),\quad f_2(x_1,\ x_2, \ldots, x_n),\quad \ldots,\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6}$$

полностью определяют ветвящийся случайный процесс, так как через них можно выразить $F_k(t;\ x)$, а следовательно, и $P_k^{\alpha}(t)$.

Будем говорить, что процесс *выродился*, если не осталось ни одной частицы типов (1). Вероятность того, что процесс, начавшись с одной частицы типа T_k, выродился в t-м поколении, равна

$$P_k^{(0,\,0,\,\ldots,\,0)}(t) = f_k^{(t)}(0,\ 0, \ldots, 0),\quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Вероятность того, что процесс, начавшись с одной частицы типа T_k, рано или поздно выродится, равна

$$P_k = \lim_{t\to\infty} P_k^{(0,0,\ldots,0)}(t) = \lim_{t\to\infty} f_k^{(t)}(0, 0, \ldots, 0), \quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Назовем процесс **вырождающимся**, если все

$$P_i = 1, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Из вероятностных соображений легко получить, что $P_1, P_2, \ldots, P_n$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$x_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Система уравнений (9) всегда имеет решение

$$x_i = 1, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

и может иметь еще какие-нибудь решения в кубе

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Если решение (10) является единственным в кубе (11), то процесс будет вырождающимся. Мы покажем ниже, как такой случай связан с поведением математических ожиданий числа частиц. Если система (9) имеет в кубе (11) решения, отличные от (10), то процесс будет невырождающимся. Мы покажем, какой корень в этом случае будет нам давать вероятности вырождения.

Обозначим через $A_{ik}(t)$ математическое ожидание числа частиц типа T_k в t-м поколении, если процесс начался с одной частицы типа T_i. Легко видеть, что

$$A_{ik}(t) = \frac{\partial F_i(t; 1, 1, \ldots, 1)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i^{(t)}(1, 1, \ldots, 1)}{\partial x_k}. \tag{12}$$

Положив $A_{ik}(1) = a_{ik}$, из (5) и (12) получим, что математические ожидания $A_{ik}(t)$ удовлетворяют системе линейных однородных уравнений в конечных разностях с постоянными неотрицательными коэффициентами

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t), \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Математические ожидания $A_{ik}(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, являются решением системы (13) при начальных данных

$$x_i(0) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Беря в (14) в качестве k $1, 2, \ldots, n$, получим все математические ожидания $A_{ik}(t)$. Как известно, любое решение системы (13) можно записать в виде

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t)\, \lambda_j^{(t)}, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

где λ_j — характеристический корень матрицы $A = \| a_{ik} \|$, а $\varphi_{ij}(t)$ — полином от t степени не выше $r-1$, если r — кратность корня λ_j. Таким образом, поведение решения (13) при $t\to\infty$ определяется характеристическими корнями λ_j матрицы $A=\|a_{ik}\|$.

Для того чтобы сформулировать основную теорему, нам необходимо будет произвести некоторую классификацию типов частиц (1). Так как каждому типу T_k взаимно однозначно соответствует переменное x_k, то мы проведем классификацию переменных, так как это проще.

Зафиксируем переменное x_k с произвольным индексом k и из всей совокупности переменных выделим два множества A_k и B_k. Положим $x_l\in A_k$ тогда и только тогда, когда при некотором t $f_l^{(t)}$ зависит от x_k; положим $x_j\in B_k$ тогда и только тогда, когда при некотором t $f_k^{(t)}$ зависит от x_j. Пересечение этих двух множеств назовем классом сообщающихся переменных $S^{(k)}=A_k\cap B_k$. Если класс $S^{(k)}$ пуст, то x_k назовем особым переменным. Если класс $S^{(k)}$ не пуст, то легко видеть, что $x_k\in S^{(k)}$ и что из $x_l\in S^{(k)}$ следует $S^{(l)}=S^{(k)}$, т. е. определение класса сообщающихся переменных не зависит от того, с какого переменного мы начали нашу конструкцию. Итак, все множество типов (1) распадается на непересекающиеся классы сообщающихся типов и на особые типы.

Назовем класс Ψ сообщающихся переменных финальным, если для каждого $x_l\in\Psi$ соответствующая функция f_l является однородной линейной формой от переменных из класса Ψ (коэффициенты в этой линейной форме могут зависеть от других переменных). Это означает*, что каждая частица любого типа из финального класса Ψ среди своего потомства в любом поколении с вероятностью единица имеет ровно одну частицу какого-нибудь типа из Ψ.

Теперь мы можем сформулировать основной результат. Пусть ветвящийся случайный процесс задан производящими функциями (6), все вторые частные производные которых существуют и конечны в точке (1, 1, ..., 1). Тогда имеет место следующая

Теорема. *Для того чтобы ветвящийся случайный процесс с типами частиц* (1) *был вырождающимся, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одновременно два условия*:

1) *система типов* (1) *не содержит ни одного финального класса;*

2) *все характеристические корни матрицы* $A=\|a_{ik}\|$ *лежат в единичном круге* $|\lambda|\leqslant 1$.

Доказательство этой теоремы требует более подробной классификации множества типов частиц (1) и опирается на целый ряд вспомогательных лемм относительно решения системы уравнений (9) и свойств матриц $A=\|a_{ik}\|$ с неотрицательными элементами.

Если процесс не вырождается, то система (9) в кубе (11) имеет более одного решения. В этом случае корень системы (9), ближайший к началу координат (0, 0, ..., 0) в кубе (11) (существует один и только один такой корень), дает вероятности вырождения (8).

Из теоремы о вырождающихся ветвящихся случайных процессах следует, что процесс без финальных классов будет вырождающимся тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_{ik}(t)}{\lambda^t}=0 \tag{15}$$

для всех i, $k=1, 2, \ldots, n$, и для любого $\lambda>1$.

---

* Понятие финального класса шире, чем понятие финальной группы в [2]. Чтобы финальный класс Ψ был группой в смысле [2], надо потребовать дополнительно, что частицы типов, принадлежащих Ψ, производят только частицы типов, принадлежащих Ψ.

Таким образом, возможно существование такого процесса, у которого некоторые математические ожидания $A_{ik}(t)$ растут безгранично, хотя сам процесс с вероятностью единица выродится, с какой бы совокупности частиц он ни начинался. Ниже дается пример такого процесса.

П р и м е р. Пусть процесс задан функциями

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}, \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Этот процесс будет вырождающимся, так как $P_1 = P_2 = 1$, но математические ожидания равны

$$A_{11}(t) = 1, \quad A_{12}(t) = t, \quad A_{21}(t) = 0, \quad A_{22}(t) = 1,$$

т. е. $A_{12}(t) \to \infty$, когда $t \to \infty$.

Нужно заметить, что все здесь изложенное относительно вероятностей вырождения P_i почти очевидным образом переносится на полные финальные вероятности Q_k, введенные в [2].

Поступило
2 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров и Н. А. Дмитриев, ДАН, **56**, № 1 (1947). [2] А. Н. Колмогоров и Б. А. Севастьянов, ДАН, **56**, № 8 (1947).