Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 8

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 19 I 1948)*

В настоящей статье рассматривается интегральное уравнение

$$f(x)+\int_0^\infty f(t)\,k(x-t)\,dt=g(x), \quad 0<x<\infty. \tag{1}$$

Метод решения уравнения (1), предложенный E. Hopf'ом и N. Wiener'ом [1] для случая однородного уравнения и обобщенный E. Reissner'ом [2] и В. А. Фоком [3,4] на случай неоднородного уравнения, применим лишь тогда, когда ядро уравнения — экспоненциального типа ($k(x)=O(e^{-\lambda|x|})$, $\lambda>0$). Ниже мы даем исчерпывающее решение вопроса о существовании и единственности решения уравнения (1) в классе $L^2$ при $g(x)\in L^2$, а также приводим решение этого интегрального уравнения в квадратурах в предположении, что $k(x)\in L^2$ и, кроме того, интеграл

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,e^{ixt}dt$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &K(x)\in Lip\,\alpha\ (\alpha>0) \text{ при } -\infty<x<\infty;\\ &K(x)=O(|x|^{-\beta}), \quad \beta>0 \text{ при } |x|\to\infty;\\ &K(x)\neq-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty<x<\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Первые два из условий (2) выполняются, например, если

$$k(x)=O(|x|^{-1-\varepsilon}) \text{ при } |x|\to\infty,$$

$$\operatorname*{var}_{-x<t<x} k(t)=O(x^{1-\varepsilon}) \quad \text{при } x\to\infty,\ \varepsilon>0$$

$\left(\text{в этом случае } \alpha=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},\ \beta=\varepsilon\right)$.

В настоящем кратком сообщении мы для простоты изложения предполагаем, что функция $K(x)$ удовлетворяет условиям Липшица и не принимает значения $-1/\sqrt{2\pi}$ вдоль всей оси $x$. Предлагаемый нами метод полностью применим, однако, и в том случае, если функция $K(x)$ в конечном числе точек оси $x$ принимает значение $-1/\sqrt{2\pi}$, а также если эта функция имеет конечное число точек разрыва.

Условившись считать, что $f(x)=g(x)=0$ при $-\infty<x<\infty$, и вводя обозначения

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{ixt}\,dt, \quad G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{ixt}\,dt,$$

можем придать уравнению (1) вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F(t)[1+\sqrt{2\pi}\,K(t)]-G(t)\}\,e^{-ixt}dt=0, \quad 0<x<\infty. \tag{3}$$

Условие же $f(x)=0$ при $-\infty<x<0$ можно представить в форме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,e^{-ixt}dt=0, \quad -\infty<x<0. \tag{4}$$

Предлагаемый нами метод решения интегрального уравнения (1) основывается на следующей лемме

Лемма. *Для того чтобы функция* $\psi(x)=\psi_1(x)+i\psi_2(x)$ $(\psi(x)\in L^2)$ *представляла на действительной оси предельные значения функции, голоморфной в верхней (в нижней) полуплоскости и исчезающей на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы интеграл* $\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,e^{ixt}dt$ *был равен нулю на положительной (на отрицательной) полуоси* $x$.

Если функция $\psi_1(x)+i\psi_2(x)$ представляет предельные значения функции, голоморфной в верхней (в нижней) полуплоскости и исчезающей на бесконечности, то между интегралами

$$\Psi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(t)\,e^{ixt}\,dt, \quad \Psi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(t)\,e^{ixt}\,dt$$

имеет место известная связь:

$$\Psi_2(x)=i\,\Psi_1(x)\operatorname{sign}x \qquad (\text{соответственно } \Psi_2(x)=-i\,\Psi_1(x)\operatorname{sign}x),$$

откуда непосредственно вытекает необходимость условий, указанных в лемме.

Достаточность этих условий следует из соотношения:

$$\text{при } y<0 \;\; \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(t)\,dt}{t-z}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\Psi(t)\,e^{-itz}dt=0,$$

$$\text{если } \Psi(t)=0 \text{ при } 0<t<\infty\,;$$

соответственно:

$$\text{при } y>0 \;\; \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(t)\,dt}{t-z}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{-\infty}\Psi(t)\,e^{-itz}\,dt=0,$$

$$\text{если } \Psi(t)=0 \text{ при } -\infty<t<0.$$

Итак, если существует функция $F(x)\in L^2$, удовлетворяющая соотношениям (3) и (4), то существуют функции $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$, голоморфные первая в верхней, вторая в нижней полуплоскости, исчезающие на бесконечности, соответственно равные на действительной оси:

$$\Phi_+(x+i0)=F(x), \quad \Phi_-(x-i0)=F(x)\,[1+\sqrt{2\pi}\,K(x)]-G(x),$$
$$-\infty<x<\infty$$

и, следовательно, удовлетворяющие соотношению:

$$[1+\sqrt{2\pi}\,K(x)]\,\Phi_+(x+i0)-\Phi_-(x-i0)=G(x), \quad -\infty<x<\infty. \tag{5}$$

Обратно, если мы построим функции $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$, голоморфные первая в верхней, вторая в нижней полуплоскости, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие граничному условию (5), то, положив $F(x) = \Phi_+(x+i0)$, мы найдем при условии, если $\Phi_+(x+i0) \in L^2$, функцию $F(x) \in L^2$, удовлетворяющую соотношениям (3) и (4), ибо для функций $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$ мы, согласно указанной выше лемме, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_+(t+i0) e^{-ixt} dt = 0, \qquad -\infty < x < 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_-(t-i0) e^{-ixt} dt = 0, \qquad 0 < x < \infty.$$

При этом функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_+(t+i0) e^{-ixt} dt, \tag{6}$$

будучи равной нулю при $-\infty < x < 0$, будет при $0 < x < \infty$ удовлетворять интегральному уравнению (1), принадлежа классу $L^2$.

Итак, решение интегрального уравнения (1) эквивалентно построению голоморфных функций $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$ по граничному условию (5).

Определение. Будем называть индексом интегрального уравнения (1) целое число $n$, равное приращению, приобретаемому функцией $\frac{1}{2\pi} \arg [1 + \sqrt{2\pi} K(x)]$ при изменении $x$ от $-\infty$ до $\infty$.

Построив функции $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$, голоморфные первая в верхней, вторая в нижней полуплоскости, обращающиеся в нуль на бесконечности и удовлетворяющие граничному условию (5), найдем:

$$\Phi_+(x+i0) = \frac{1}{2[1+\sqrt{2\pi}K(x)]} \left\{ G(x) + H(x) \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t)\,dt}{H(t)(t-x)} + (x-i)^n P(x) \right] \right\}, \tag{7}$$

где

$$H(x) = \sqrt{W(x)} \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W(t)\,dt}{t-x} \right],$$

$$W(x) = \left( \frac{x+i}{x-i} \right)^n [1 + \sqrt{2\pi} K(x)], \tag{8}$$

$P(x)$ — полином степени $-n-1$ с произвольными комплексными коэффициентами при $n < 0$ и $P(x) = 0$ при $n \geqslant 0$.

При $n \leqslant 0$ указанное решение имеет место при любой правой части в (5), при $n > 0$ — тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t)\, t^{k-1} dt}{H(t)(t-i)^n} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

В силу условий (2) $|H(x)| < \infty$ и $|H^{-1}(x)| < \infty$, а в этом случае из (7) непосредственно следует, что $\Phi_+(x+i0) \in L^2$, если $G(x) \in L^2$.

Таким образом, формулы (6), (7) и (8) определяют решение $f(x) \in L^2$ интегрального уравнения (1), если $G(x) \in L^2$.

Аналогично решая союзное однородное интегральное уравнение:

$$f(x)+\int_0^\infty f(t)\,k(f-x)\,dt=0, \qquad 0<x<\infty, \tag{10}$$

мы найдем, что при $n>0$ это уравнение имеет в классе $L^2$ $n$ комплексных решений $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$, определяемых формулами:

$$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F_k(t)\,e^{ixt}dt, \quad F_k(x)=\frac{x^{k-1}}{H(x)(x-i)^n}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots\ n. \tag{11}$$

Таким образом, условиям (9) можно придать вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\,F_k(t)\,dt=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

или

$$\int_0^\infty g(t)\,f_k(t)\,dt=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{12}$$

Итак, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Пусть $n$ — индекс интегрального уравнения* (1). *Тогда, если $k(x) \in L^2$ и кроме того выполняются условия* (2), *то*

1) *при $n=0$ уравнение* (1) *имеет в классе $L^2$ единственное решение при любой правой части $g(x) \in L^2$.*

2) *при $n<0$ уравнение* (1) *при любой правой части $g(x) \in L^2$ имеет в классе $L^2$ решение, содержащее $n$ произвольных комплексных постоянных;*

3) *при $n>0$ союзное однородное интегральное уравнение* (10) *имеет в классе $L^2$ $n$ комплексных решений; для того чтобы в этом случае интегральное уравнение* (1) *имело решение в классе $L^2$, необходимо, чтобы его правая часть $g(x)$ была ортогональна ко всем решениям союзного однородного уравнения; при выполнении этих условий интегральное уравнение* (1) *имеет единственное решение в классе $L^2$ при $g(x) \in L^2$.*

Если интегральное уравнение (1) разрешимо, то его решение может быть найдено посредством одних лишь квадратур по формулам (6), (7) и (8).

Пример. Если $k(x)=\frac{\mu-1}{2}e^{-|x|}$, $\mu>0$, то $n=0$, $K(x)=$ $=\frac{\mu-1}{\sqrt{2\pi}(x^2+1)}$, $W(x)=\frac{x^2+\mu}{x^2+1}$, $H(x)=\frac{x-i\sqrt{\mu}}{x-i}$, $\Phi_+(x+i0)=$ $=(x^2+\mu)^{-1}\left[(x^2+1)\,G(x)-i\,(\sqrt{\mu}-1)(x+i)\,G(i\sqrt{\mu})\right]$, $f(x)=$

$$=g(x)+\frac{1-\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}}\int_0^\infty g(t)\left[(1+\sqrt{\mu})\,e^{-\sqrt{\mu}\,|x-t|}-(1-\sqrt{\mu})\,e^{-\sqrt{\mu}\,(x+t)}\right]dt,$$

$0<x<\infty$.

Поступило
14 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Wiener u. E. Hopf, Sitzungsber. Preuss. Ak., Math.-Phys. Kl., 696 (1931) [2] E. Reissner, J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech., **20**, 219 (1941). [3] В. А. Фок, ДАН. **37**, 147, (1942). [4] В. А. Фок, Матем. сб., **14** (**56**), № 1—2, 1 (1944).