

В. Н. КЕССЕНИХ

О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ДЛИННОЙ ОДНОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

(Представлено академиком Н. Д. Папалекси 15 III 1940)

Волновое сопротивление бесконечно длинного цилиндрического провода можно было бы определить следующим образом.

Приложим на поверхности провода параллельно оси цилиндра z сосредоточенную на бесконечно малом участке вблизи от $z=0$ электродвижущую силу

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^{cmp} dz. \quad (1)$$

Приложенная эдс вызовет: 1) емкостный ток, быстро уменьшающийся с удалением от места приложения эдс, и 2) совпадающую по фазе эдс активную составляющую тока, которой соответствует направляемый вдоль линии поток энергии.

Волновое сопротивление бесконечно длинной линии при отсутствии отраженной волны определяется, как отношение эдс к току в начале линии. В данном случае, когда провод идет в обе стороны от точки приложения эдс, отношение тока к активной составляющей тока будет соответствовать учетверенному волновому сопротивлению, подобно тому, как сопротивление излучения диполя, составленного из двух диполей с одинаковым направлением тока, равно учетверенному сопротивлению излучения одного диполя.

Вторую половину провода мы можем заменить идеально проводящей плоскостью $z=0$, перпендикулярной оси провода. При этом отношение эдс к активной составляющей тока будет равно удвоенному волновому сопротивлению свободной линии (удвоение происходит благодаря наличию эдс, наведенной зеркальным изображением; учетверение не происходит, так как поток энергии за проводящую плоскость отсутствует).

Таким образом мы приходим к следующему расчету.

В цилиндрических координатах $\rho=a$ —поверхность экрана (фиг. 1). Эдс приложена на поверхности провода параллельно оси цилиндра. Сосредоточенную на малом участке эдс можно представить распределенной вдоль z с напряженностью поля

$$E_z^{cmp} = \frac{\mathcal{E}}{a} e^{-\frac{z}{a}}, \quad (2)$$

где α — малая величина, которую можно в пределе положить равной нулю. Здесь под E_z и \mathcal{E} понимаются комплексные амплитуды, соответствующие зависимости от времени в форме:

$$E_z(t) = E_z e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E} e^{-i\omega t}.$$

Применяя к E_z^{cmp} операционное изображение по отношению к z , можем написать

$$E_z^{cmp} = \frac{\mathcal{E}}{a} \frac{p}{p + \frac{1}{a}}$$

и

$$E_z^{cmp} = \frac{\mathcal{E}}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pz}}{p + \frac{1}{a}} dp. \quad (3)$$

Вне проводника компонента напряженности поля E_z должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0, \quad (4)$$

где

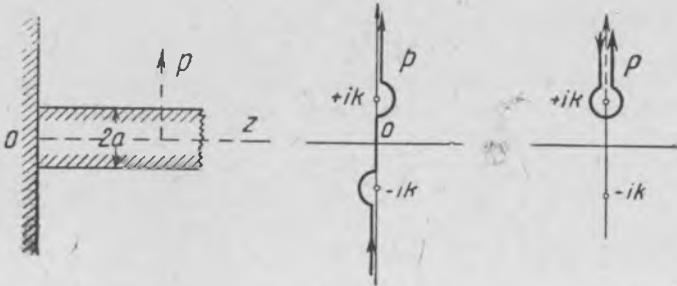
$$k = \frac{\omega}{c}.$$

Решение уравнения (4), удовлетворяющее граничному условию $E_z = -E_z^{cmp}$ при $\rho = a$ и условиям излучения на бесконечности, будет:

$$E_z = -\frac{\mathcal{E}}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pz}}{p + \frac{1}{a}} \frac{H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 + p^2})}{H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 + p^2})} dp \quad (5)$$

($H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля нулевого порядка первого рода).

Считая k имеющим бесконечно малую положительную мнимую часть, путь интегрирования вблизи от точек разветвления $p = \pm ik$ следует



Фиг. 1.

Фиг. 2.

Фиг. 3.

провести согласно фиг. 2. Этот путь интегрирования, как легко видеть, соответствует интегральному представлению вектора Герца поля первичного излучения диполя (1).

Напряженность магнитного поля H_φ и радиальная компонента электрического поля E_ρ , удовлетворяющие уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} ikE_\rho &= \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \\ ikE_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (H_\varphi \rho)}{\partial \rho}, \\ ikH_\varphi &= \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

на основании (5) выразятся как:

$$H_\varphi = -\frac{ik\mathcal{E}}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{ps} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 + p^2})}{\left(p + \frac{1}{a}\right) \sqrt{k^2 + p^2} H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 + p^2})} dp, \quad (7)$$

$$E_p = \frac{\mathcal{E}}{a} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{pe^{ps} H_1^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 + p^2})}{\left(p + \frac{1}{a}\right) \sqrt{k^2 + p^2} H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 + p^2})} dp. \quad (8)$$

Сила тока $J = \frac{H_\varphi a}{2}$ при $\rho = a$; поэтому

$$J = -\frac{ika}{2a} \frac{\mathcal{E}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{ps}}{\left(p + \frac{1}{a}\right)} \frac{H_1^{(1)}(a \sqrt{k^2 + p^2})}{\sqrt{k^2 + p^2} H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 + p^2})} dp \quad (9)$$

и при $\alpha \rightarrow 0$

$$J = -\frac{ika}{2} \frac{\mathcal{E}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{ps}}{\sqrt{k^2 + p^2}} \frac{H_1^{(1)}(a \sqrt{k^2 + p^2})}{H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 + p^2})} dp. \quad (9a)$$

Интеграл (9a) можно преобразовать, деформируя путь в петлю, охватывающую линию разреза и точку разветвления $p = ik$. Линия разреза проходит по мнимой оси от $p = ik$ до $i\infty$. При обходе вокруг точки разветвления знак $\sqrt{k^2 + p^2}$ меняется на противоположный. После перехода к пути, представленному на фиг. 3, замены переменного $p = i(k + u)$, мы получаем, учитывая соотношения:

$$H_1^{(1)}(-ix) = H_1^{(2)}(ix); \quad H_0^{(1)}(-ix) = -H_0^{(2)}(ix);$$

$$H_{\nu}^{(1,2)}(ix) = J_\nu(ix) \pm iN_\nu(ix);$$

$$N_0(ix) J_1(ix) - N_1(ix) J_0(ix) = \frac{2}{\pi ix};$$

$$J_0(ix) = I_0(x); \quad H_0^{(1)}(ix) = -\frac{2i}{\pi} K_0(x);$$

$$H_0^{(1)}(ix) H_0^{(2)}(ix) = \frac{4}{\pi^2} [K_0^2(x) - i\pi I_0(x) K_0(x)],$$

следующее выражение для силы тока [знак $\sqrt{\quad}$ определяется так, чтобы вещественная часть J при $z \rightarrow 0$ была положительной]:

$$J = \frac{k\mathcal{E}e^{iks}}{4} \int_0^\infty \frac{e^{ius}}{u^2 + 2ku} \frac{du}{K_0^2(a \sqrt{u^2 + 2ku}) - i\pi I_0(a \sqrt{u^2 + 2ku}) K_0(a \sqrt{u^2 + 2ku})}. \quad (10)$$

Вещественная часть J при $z \rightarrow 0$ будет

$$Re J = \frac{k\mathcal{E}}{4} \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 2ku) N}, \quad (11)$$

где

$$N = K_0^2(a \sqrt{u^2 + 2ku}) + \pi^2 I_0^2(a \sqrt{u^2 + 2ku}).$$

Мнимая часть J имеет положительный знак, что соответствует емкостному току, замыкающему эдс в месте ее приложения. Мнимая часть J бесконечно велика при $\alpha = 0$ и $z = 0$, но становится конечной и быстро убывает с возрастанием z .

Обозначая через W волновое сопротивление, равное

$$W = \frac{1}{Y} = \frac{\mathcal{E}}{2Re J}, \quad (12)$$

мы можем с помощью (11) найти W , как функцию частоты и радиуса провода.

Выраженная в практических единицах проводимость Y , соответствующая волновому сопротивлению W , будет

$$Y = \frac{1}{60} \int_0^{\infty} \frac{k du}{(u^2 + 2ku) N \Omega}. \quad (13)$$

Вводя обозначения $k' = ku$ и $u' = ua$, с последующей заменой u' на u , получаем:

$$Y = \frac{1}{60} \int_0^{\infty} \frac{k' du}{(u^2 + 2k'u) [K_0^2(\sqrt{u^2 + 2k'u}) + \pi^2 I_0^2(\sqrt{u^2 + 2k'u})]} \frac{1}{\Omega}. \quad (14)$$

Из последнего выражения видно, что определенное вышеуказанным образом волновое сопротивление длиной однопроводной линии есть функция

$$k' = \frac{2\pi a}{\lambda},$$

т. е. определяется отношением периметра провода к длине волны.

При

$$k' = 0 \quad W = \frac{1}{Y} = \infty,$$

при

$$k' \rightarrow \infty \quad W \rightarrow 0.$$

Приближенное вычисление интеграла

$$A = \int_0^{\infty} \frac{k' du}{(u^2 + 2k'u) N}$$

может быть осуществлено при помощи деления промежутка интегрирования и соответственно интеграла на три части:

- 1) A_0 ; $0 < u < u_0$; $\frac{u_0}{2k'} \ll 1$.
- 2) A_1 ; $u_0 < u < u_1$; $u_1^2 + 2k'u_1 > 4$.
- 3) A_2 ; $u_1 < u < \infty$.

В первой области

$$N \approx \frac{1}{4} \ln^2 \gamma^2 k'u; \quad \gamma = 1,781 \dots$$

и

$$A_0 \approx -\frac{2}{\ln \gamma^2 k'u_0}.$$

A_1 вычисляется путем деления промежутка $u_1 - u_0$ на n малых частей $u_{0i} - u_{0i-1}$, как

$$A_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\bar{N}_i} \int_{u_{0i-1}}^{u_{0i}} \frac{2k' du}{u^2 + 2k'u} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\bar{N}_i} \ln \frac{1 + \frac{2k'}{u_{0i-1}}}{1 + \frac{2k'}{u_{0i}}},$$

(\bar{N}_i — среднее значение N для i -го промежутка).

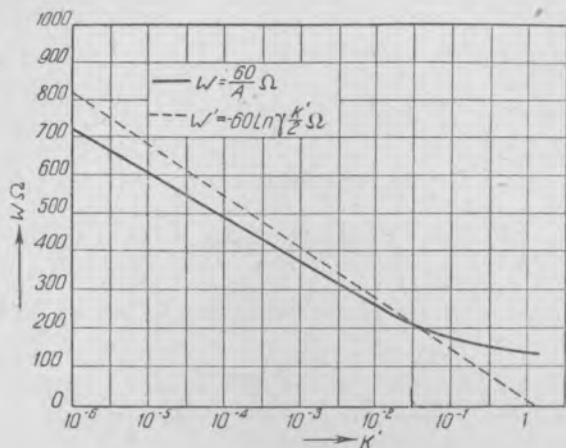
В третьей области $N \approx \pi \frac{e^{2u}}{2u}$;

$$A_2 \approx -\frac{2k'}{\pi} \bar{E}_i(-2u_1) \approx 0,0038 \frac{2k'}{\pi}; \quad (\text{при } u_1 = 2).$$

Вычисленный таким путем ход зависимости $W = \frac{60}{A} [\Omega]$ от $k^1 = \frac{2\pi a}{\lambda}$ представлен на диаграмме фиг. 4. Там же, пунктиром, показан ход величины

$$W' = 60 \left(\ln \frac{\lambda}{\pi a} - 0,577 \dots \right),$$

приближенно представляющей волновое сопротивление, определенное исходя из соображений о связанной энергии переменного поля (^{2,3}).



Фиг. 4.

Близость хода обеих кривых обусловлена тем, что в выражении для A член $A_0 \approx -\frac{1}{\ln \gamma k^1 \delta}$ (δ —некоторая малая величина) является основным, по сравнению с A_1 и A_2 , имеющими относительно малое значение.

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева
СФТИ

Поступило
17 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. А. Введенский, Основы теории распространения радиоволн, стр. 121—126 (1934). ² В. Н. Кессених, Тр. I краевой конференции физиков Зап. Сибири, вып. 4, 1 (1935). ³ В. Н. Кессених, ЖТФ, 9, 1557 (1939).