Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 8

МАТЕМАТИКА

Член Болгарской Академии Наук Н. ОБРЕШКОВ

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ РАЗНОСТЕЙ ОТ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 I 1948)

Пусть $f(x)$ — функция переменного x, определенная на интервале (a, b); обозначим через

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$
$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x),$$
$$\Delta_h^3 f(x) = \Delta_h(\Delta_h^2 f(x)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

конечные разности этой функции для положительного приращения h. Обозначим через

$$\omega(f, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}, \qquad F(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \tag{1}$$

разделенные разности Ньютона для $n+1$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ интервала (a, b). Если $f(x)$ — действительная и непрерывная на (a, b) функция, то, по теореме С. Н. Бернштейна [1], существует такое число $\delta > 0$, что для всякого $h < \delta$

$$\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!\, h^n} \Delta_h^n f(\zeta), \tag{2}$$

где $a < \zeta < b$.

Пусть теперь $f(x)$ функция, действительная и непрерывная во всяком интервале (a, A), $A > a$; допустим, что существует предел

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = A \tag{3}$$

для некоторой неограниченно возрастающей последовательности чисел

$$y_1, y_2, \ldots \tag{4}$$

и для некоторого целого числа $m \geqslant 0$. Из последовательности (4) можно извлечь подпоследовательность

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \to \infty, \tag{5}$$

для которой $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \infty$. Для этого достаточно принять за t_1 любое положительное число из последовательности (4), затем другое число $t_2 > 2t_1$, потом число $t_3 > 3t_2$ и т. д. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_m$ — любые числа, превосходящие a; рассмотрим следующее выражение $(p+1=n-m)$, $n > m$:

$$I_\lambda = (-1)^{p+1} t_\lambda t_{\lambda+1} \ldots t_{\lambda+p} \omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_m, t_\lambda, t_{\lambda+1}, \ldots, t_{\lambda+p}),$$

где t_λ превосходит числа x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, m$. Мы докажем следующее равенство:

$$\lim_{\lambda \to \infty} I_\lambda = \omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_m) - A. \tag{6}$$

Если положить

$$F_1(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m),$$
$$F_2(x) = (x-t_\lambda)(x-t_{\lambda+1})\ldots(x-t_{\lambda+p}),$$

то это выражение примет вид

$$I_\lambda = \sum_{i=0}^{m} M_i + \sum_{s=0}^{p} N_s,$$

где

$$M_i = \frac{(-1)^{p+1} f(x_i) t_\lambda \ldots t_{\lambda+p}}{F_1'(x_i) F_2(x_i)}, \qquad N_s = \frac{(-1)^{p+1} f(t_{\lambda+s}) t_\lambda \ldots t_{\lambda+p}}{F_1(t_{\lambda+s}) F_2'(t_{\lambda+s})}.$$

Так как

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{(-1)^{p+1} t_\lambda t_{\lambda+1} \ldots t_{\lambda+p}}{F_2(x_i)} = 1,$$

то

$$\lim_{\lambda \to \infty} M_i = \frac{f(x_i)}{F_1'(x_i)}.$$

Записывая N_0 в виде

$$N_0 = \frac{(-1)^{p+1} \dfrac{f(t_\lambda)}{t_\lambda^m}}{\left(1-\dfrac{x_0}{t_\lambda}\right)\left(1-\dfrac{x_1}{t_\lambda}\right)\ldots\left(1-\dfrac{x_m}{t_\lambda}\right)\left(\dfrac{t_\lambda}{t_{\lambda+1}}-1\right)\ldots\left(\dfrac{t_\lambda}{t_{\lambda+p}}-1\right)},$$

легко доказать, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} N_0 = -A.$$

Точно так же доказывается, что $\lim N_s = 0$, $1 \leqslant s \leqslant p$, откуда и следует справедливость равенства (6).

Мы теперь докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — действительная функция, непрерывная для $x > a$ (т. е. во всяком интервале (a, X), $X > a$) и такая, что ее разности некоторого порядка n неотрицательны для $x > a$. Допустим, что существует последовательность* (4) *и целое число m, $0 \leqslant m < n$, для которых предел* (3) *существует. Тогда для любых чисел $x_0, x_1, \ldots, x_m$, превосходящих a, имеем*

$$(-1)^{n-m}[\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_m) - A] \geqslant 0. \tag{7}$$

Теорема немедленно вытекает из равенств (2) и (6).

Кроме того, имеем:

Если для системы из $m+1$ *чисел* $x'_0, x'_1, \ldots, x'_m$ *в формуле* (7) *имеет место знак равенства, то тот же знак будет иметь место для любых чисел* $x_0, x_1, \ldots, x_m$, *которые не меньше, чем числа* x'_i, $i=0, 1, 2, \ldots, m$.

Это легко доказывается, если заметить, что для произвольных $(m+2)$ чисел, превосходящих a, по теореме 1 получаем:

$$(-1)^{n-m-1}\omega(f; x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}) \geqslant 0,$$

а также выполняется известное соотношение

$$\omega(f; x_0, \ldots, x_m, x_{m+1}) = \frac{\omega(f; x_0, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}) - \omega(f; x_0, \ldots, x_m)}{x_{m+1} - x_m}.$$

Применяя теорему 1 к функции $\varphi(x) - \psi(x)$, находим:

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ — *две функции, действительные и непрерывные для* $x > a$; *допустим, что для некоторой последовательности* (4) *пределы*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\varphi(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = B, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\psi(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = C$$

существуют, где m — *некоторое неотрицательное целое число. Если, кроме того, для некоторого целого* $n > m$ $\Delta_h^n\psi(x) \leqslant \Delta_h^n\varphi(x)$, $x > a$, $h > 0$, *то для любых чисел* $x_0, x_1, \ldots, x_m$, *превосходящих* a,

$$(-1)^{n-m}[\omega(\psi; x_0, \ldots, x_m) - C] \leqslant (-1)^{n-m}[\omega(\varphi; x_0, \ldots, x_m) - B]. \quad (8)$$

Если $\Delta_h^n\psi(x) \geqslant \Delta_h^n\varphi(x)$, будем иметь:

$$(-1)^{n-m}[\omega(\psi; x_0, \ldots, x_m) - C] \geqslant (-1)^{n-m}[\omega(\varphi; x_0, \ldots, x_m) - B].$$

Отсюда легко получается следующий результат: если $\Delta_h^n\varphi(x)$ не меняет знака для $x > a$, $h > 0$, то из $|\Delta_h^n\psi(x)| \leqslant |\Delta_h^n\varphi(x)|$ следует

$$|\omega(\psi; x_0, \ldots, x_m) - C| \leqslant |\omega(\varphi; x_0, \ldots, x_m) - B|. \quad (9)$$

В частном случае, когда $x_0 = x$, $x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_0 + mh$ неравенства (8) и (9) заменяются следующими:

$$(-1)^{n-m}\left[\frac{1}{h^m}\Delta_h^m\psi(x) - m!\,C\right] \leqslant (-1)^{n-m}\left[\frac{1}{h^m}\Delta_h^m\varphi(x) - m!\,B\right], \quad (10)$$

$$\left|\frac{1}{h^m}\Delta_h^m\psi(x) - m!\,C\right| \leqslant \left|\frac{1}{h^m}\Delta_h^m\varphi(x) - m!\,B\right|. \quad (11)$$

Замечание, касающееся знака равенства в формулах (8), (9), (10) и (11), остается в силе. Полагая $h \to 0$ (или же непосредственно) получаются аналогичные неравенства для производных, которые были уже получены нами ранее ([2]).

Поступило
21 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. N. Bernstein, Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926. [2] Н. Обрешков, Годишник на Софийския университет, 41, 121 (1944—45); C. R., 223, 397 (1946).