Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 8

МАТЕМАТИКА

А. Г. МАЙЕР

О ПОРЯДКОВОМ ЧИСЛЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 I 1948)

1. В настоящей заметке излагаются результаты, более сильные по сравнению с ранее опубликованными ([1,2]). При построении мы опираемся на динамическую систему геодезических линий на некоторой поверхности отрицательной кривизны, вкратце описанную у Биркгофа ([3]), и пользуемся символическим методом.

2. Сохраняя обозначения Биркгофа, введем 4 новых символа:

$$\alpha_1 = xw_2,\ \alpha_2 = xw_3,\ \alpha_3 = yw_3,\quad \alpha_4 = yw_4.$$

Очевидно, что при любой записи вида

$$\ldots a_{-n}\ldots a_{-1}\,a_0\,a_1\ldots a_n\ldots, \tag{1}$$

где каждое a_k есть один из символов α_i, ни один из запретов, наложенных на основные символы, не будет нарушен, и поэтому каждая запись (1) определяет некоторую траекторию. Очевидно также, что условие того, чтобы траектория L имела среди своих $\omega(\alpha)$-предельных траекторию L', причем обе траектории записаны в символах α_i, сохраняется тем же, что и вообще в символической динамике ([4,5]), т. е.: при любом $r>0$ $(r<0)$ и любом отрезке L'

$$b_{-m}\,b_{-m+1}\ldots b_n \tag{2}$$

в записи (1) траектории L найдется a_k, $k>r$ $(k<r)$ такое, что отрезок (1)

$$a_{k+1}\ldots a_{k+n+m+1}\quad (a_{k-n-m-1}\ldots a_k)$$

совпадает с (2).

В дальнейшем все малые латинские буквы обозначают какой-либо из символов α_i; таким образом, все в дальнейшем построенные траектории составляют некоторую часть указанной динамической системы.

3. Лемма. *Существует траектория*

$$\ldots c_{-n}\ldots c_{-1}\,c_0\,c_1\ldots c_n\ldots \tag{L}$$

и счетное множество отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, I_n = d_0^{(n)}\,d_1^{(n)}\ldots d_{k_n}^{(n)}$, $(k_n$ *четно) таких, что:*

а) I_n *не содержит как часть* I_k, $k\neq n$;

б) (L) *не содержит как часть ни одного* I_n;

в) *если I и I' — два каких угодно отрезка, то с помощью символов α_i можно составить новый отрезок G*

$$G = Ie_1 \dots e_m I'$$

такой, что если G содержит как часть одно из I_n, то I_n входит в G только как часть I или I'.

Доказательство. Положим

$$I_n = \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_3 \alpha_2,$$

где символ α_3 повторяется $2n$ раз, за символы e_i будем брать α_4, а за c_m будем брать α_1. Все требования леммы соблюдены.

4. Теорема 1. *Каков бы ни был трансфинит 2-го класса γ, можно указать в рассматриваемой динамической системе „цепочку" траекторий*

$$L_1, L_2, \dots, L_\omega, L_{\omega+1}, \dots, L_\beta, \qquad (I)$$

где $\beta \geqslant \gamma$, такую, что:

1) *ни одна аз траекторий L_δ, $\delta < \beta$, не содержит себя среди своих ω- или α-предельных точек;*

2) *если $\mu < \delta$, то L_δ входит в состав α- и ω-предельных точек L_μ* *.

Доказательство. Пусть траектория L и отрезки $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ удовлетворяют условиям леммы. Обозначим через λ_n отрезки L:

$$c_{-n} \dots c_{-1} c_0 c_1 \dots c_n.$$

Установим новую нумерацию отрезков так, чтобы каждому трансфиниту $\delta < \beta$ соответствовал один из отрезков I_k, обозначаемый символом J_δ; таким образом будем иметь систему отрезков

$$J_1, J_2, \dots, J_\omega, J_{\omega+1}, \dots, J_\delta, \dots,$$

где номера пробегают все трансфиниты, предшествующие β; каждое J_δ есть вместе с тем некоторое I_k.

Построение нужной системы траекторий будем совершать с соблюдением следующих условий:

1) В траектории L_δ отрезок J_δ встречается один и только один раз — и именно его средний элемент имеет нулевой номер; в силу этого для L_δ будет выполняться утверждение 1).

2) Если мы, построив отрезок G_δ траектории L_δ, переходим к построению отрезка G_ε траектории L_ε, ε предшествует δ, то в G_ε включается как часть G_δ и среди элементов G_ε с положительным номером, и среди элементов G_ε с отрицательным номером; в силу этого для L_δ будет выполняться утверждение 2).

3) Если построен отрезок траектории L_δ и если у δ есть непосредственно предшествующий трансфинит μ, $\delta = \mu + 1$, то переходим к построению отрезка L_μ; если нет — то переходим к построению отрезка L_ε, где ε предшествует δ и выбирается по определенному правилу.

Без ограничения общности будем считать, что у β нет непосредственно предшествующего трансфинита.

Первая ступень построения. В качестве первого отрезка траектории L_β возьмем λ_1; возьмем номер δ_1 так, чтобы J_{δ_1} совпадало с I_1.

---

* По отношению к рассматриваемой задаче настоящая теорема играет роль леммы; однако существование таких трансфинитных „цепочек", сколько известно автору, до сих пор не отмечалось; оно интересно как пример необходимости применения трансфинитов в описании классической динамической проблемы.

Построим первый отрезок траектории L_{δ_1}:

$$G^1_{\delta_1} = \lambda_1 a^1_{\delta_1} a^2_{\delta_1} \ldots a^k_{\delta_1} J_{\delta_1} b^1_{\delta_1} \ldots b^n_{\delta_1} \lambda_1$$

так, чтобы:

а) J_{δ_1} входил в $G^1_{\delta_1}$ только один раз;

б) ни один отрезок J_ε, $\varepsilon < \delta_1$, не входил в $G^1_{\delta_1}$.

Вычеркнем отрезок $I_1 \equiv J_{\delta_1}$.

Могут быть два случая, смотря по тому, есть или нет трансфинит, непосредственно предшествующий δ_1.

Если есть трансфинит μ, непосредственно предшествующий δ_1 ($\delta_1 = \mu + 1$), то строим первый отрезок траектории L_μ:

$$G^1_\mu = G^1_{\delta_1} a^1_\mu \ldots a^m_\mu J_\mu b^1_\mu \ldots b^p_\mu G^1_{\delta_1}$$

так, чтобы:

а) J_μ входил в G^1_μ только один раз;

б) ни один отрезок J_ε, $\varepsilon < \mu$, не входил в G^1_μ.

В силу леммы это возможно; выполнив построение, вычеркнем отрезок I_k, совпадающий с J_μ.

Если нет трансфинита, непосредственно предшествующего δ_1, то возьмем из отрезков $I_2, I_3, \ldots$ тот с наименьшим номером k, который имеет новую запись J_μ, $\mu < \delta_1$.

Построим таким же образом G^1_μ и вычеркнем отрезок I_k.

В конечное число шагов мы придем к построению отрезка G^1_1 траектории L_1, и на этом построения первой ступени заканчиваются. При этом будет вычеркнуто конечное число отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Пусть выполнена $n-1$ ступень построения.

Построения n-й ступени. В качестве n-го отрезка L_β возьмем λ_n (содержащий все λ_k, $k < n$); пусть i — наименьший из номеров невычеркнутых отрезков I_k и пусть δ_n таково, что J_{δ_n} совпадает с I_i.

Возможны два случая.

Если между трансфинитами δ_n и β нет таких, которые раньше участвовали в построении, то строим отрезок

$$G^n_{\delta_n} = \lambda_n a^1_{\delta_n} \ldots a^q_{\delta_n} J_{\delta_n} b^1_{\delta_n} \ldots b^r_{\delta_n} \lambda_n$$

с соблюдением условий а) и б) и вычеркиваем I_i.

Если между δ_n и β есть трансфиниты, ранее употреблявшиеся в построении, то пусть ξ — наименьший из них. Строим сперва (с соблюдением а) и б))

$$G^n_\xi = \lambda_n a^1_\xi \ldots a^s_\xi G^m_\xi b^1_\xi \ldots b^t_\xi \lambda_n,$$

где G^m_ξ — последний построенный отрезок L_ξ.

Согласно правилу 3) у ξ нет непосредственно предшествующего трансфинита. Продолжаем построение, определяя

$$G^n_{\delta_n} = G^n_\xi a^1_{\delta_n} \ldots a^u_{\delta_n} J_{\delta_n} b^1_{\delta_n} \ldots b^v_{\delta_n} G^n_\xi$$

с соблюдением условий а) и б) и вычеркнем I_i.

Если у трансфинита δ_n есть непосредственно предшествующие, то построение продолжается, как в первой ступени: строим отрезок траектории L_μ, где $\mu + 1 = \delta$, и вычеркиваем соответствующее I_k. Если у трансфинита δ_n нет непосредственно предшествующего, то опять определяем трансфинит μ, соответствующий наименьшему номеру из невычеркнутых отрезков I_n, и снова различаем два случая, смотря по тому, есть ли трансфинит, ранее употреблявшийся в построении и содержащийся между μ и δ_n, или такого трансфинита нет.

Таким образом в конечное число шагов дойдем до построения отрезка G_1^n траектории L_1, и построения n-й ступени закончатся. Заметим, что каждая траектория L_δ, $\delta < \beta$, будет участвовать в построении счетное множество раз, ибо за каждым трансфинитом δ есть счетное множество трансфинитов вида $\delta + p$ (p конечно), и им будут соответствовать отрезки I_m со сколь угодно большими номерами; после же построения n-й ступени всего будет вычеркнуто конечное число отрезков.

Указанный процесс построения, как легко видеть, и доказывает теорему.

5. Порядковым числом центральных движений β_c назовем, по определению, наименьший трансфинит, при котором (в результате последовательного удаления траекторий, не являющихся предельными для какой-либо траектории без замыкания оставшегося множества) будут удалены все траектории, кроме включающих себя в состав своих ω- или α-предельных точек *.

6. Теорема 2. *Каково бы ни было трансфинитное число 2-го класса γ, существует динамическая система*

$$dx_i / dt = X_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

где функции X_i бесконечно дифференцируемы по своим аргументам, определенная в некотором многообразии M_3, такая, что

$$\beta_c \geqslant \gamma.$$

Для доказательства теоремы достаточно применить к построенной в теореме 1 „цепочке“ траекторий процесс перерезания, подобный описанному в ([2]). Дело сводится к построению функции $\varphi(P)$, равной нулю в точках множества F, остающегося в некотором круге K_0 после удаления счетного множества окружностей K_n, положительной вне F и бесконечно дифференцируемой. Ее нетрудно получить в виде

$$f_0(x_1, x_2, x_3) + \sum_1^\infty m(n) f_n(x_1, x_2, x_3),$$

где $m(n)$ — подходяще подобранные постоянные, а функции f_n определены условиями (круг K_0 можно считать лежащим в плоскости $x_3 = 0$):

$$f_n \equiv 0 \text{ при } (x_1 - a_n)^2 + (x_2 - b_n)^2 \geqslant r_n,$$

$$f_n \equiv \exp\left[-\frac{1}{r_n^2 - (x_1 - a_n^2) - (x_2 - b_n^2)}\right] \text{ при } (x_1 - a_n)^2 + (x_2 - b_n)^2 < r_n,$$

где $(a_n, b_n, 0)$ — центр, а r_n — радиус K_n. В выражение f_0 при $0 < x_3 < 2\pi$ (где 2π есть период по координате x_3) вводится слагаемое $\exp\left[-\frac{1}{\sin^2(x_3/2)}\right]$. При $x_3 = 0$ f_0 полагается равной нулю внутри K_0 и соответствующей показательной функции вне K_0.

Физико-технический институт
Горьковского государственного
университета

Поступило
19 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Майер, ДАН, **55**, № 6 (1947). [2] А. Г. Майер, ДАН, **55**, № 7 (1947). [3] Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, гл. VIII, § 11, 1941. [4] Н. М. Morse, Am. J. Math., **43** (1921). [5] Н. М. Morse and G. A. Hedlund, ibid., **60** (1938).

* Можно построить примеры динамических систем, для которых β_c существенно меньше, чем порядковое число центральных траекторий в обычных определениях. Этот вопрос будет разобран в другой работе.