Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 8

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

ПРОСТРАНСТВА $\tilde{C}_\omega$ И $\tilde{C}^*_\omega$ И СХОДИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НИХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 I 1948)

1. Определение 1. Обозначим через $\tilde{C}$ множество всех функций вещественных, непрерывных и 2π-периодических на $(-\infty, \infty)$. Для любой функции $f \in \tilde{C}$ положим

$$\|f\|_{\tilde{C}} = \max_x |f(x)|,$$

$$\omega(u, f) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leqslant h \leqslant u}} |f(x+h) - f(x)| \quad (0 \leqslant u < \infty).$$

Функцию $\omega(u, f)$ назовем модулем непрерывности функции $f \in \tilde{C}$.

Лемма 1. *Для того чтобы функция $\omega(u)$, определенная при $0 \leqslant u < \infty$, была модулем непрерывности некоторой $f \in \tilde{C}$ такой, что $f \neq \mathrm{const}$ (т. е. чтобы нашлась $f \in C$, $f \neq \mathrm{const}$, такая, что $\omega(u) = \omega(u, f)$ при $0 \leqslant u < \infty$), необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих пяти условий*:

1) $\omega(0) = 0$;
2) $0 < \omega(u') \leqslant \omega(u'')$ *при* $0 < u' \leqslant u''$;
3) $\omega(u) = \omega(\pi)$ *при* $\pi \leqslant u < \infty$;
4) $\omega(u_1 + u_2) \leqslant \omega(u_1) + \omega(u_2)$;
5) $\omega(u)$ *непрерывна при* $0 \leqslant u < \infty$.

Определение 2. Множество всех функций $\omega(u)$, определенных при $0 \leqslant u < \infty$ и удовлетворяющих условиям 1)—5) леммы 1, обозначим Ω.

Лемма 2. *Для любой функции $\omega \in \Omega$ существует конечный предел*

$$\lim_{u \to 0+} \frac{u}{\omega(u)} \geqslant 0.$$

2. Определение 3. Пусть $\omega \in \Omega$. Для любой $f \in \tilde{C}$ положим

$$M_{\omega, f} = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 > h < \infty}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\omega(h)}$$

и обозначим через $\tilde{C}_\omega$ множество тех функций $f \in \tilde{C}$, для которых

$$M_{\omega, f} < +\infty.$$

Определение 4. Пусть $\omega \in \Omega$. Для любой функции $f \in C^{\omega}$ положим

$$\|f\|_{\tilde{C}_\omega} \equiv \|f\|_{\tilde{C}} + M_{\omega, f}. \qquad (1)$$

Теорема 1. *$\tilde{C}_\omega$ есть линейное множество функций, и норма, введенная формулой* (1), *превращает $\tilde{C}_\omega$ в пространство типа* (*B*).

Множество $\tilde{C}_\omega$ с введенной в нем нормой (1) будем называть пространством $\tilde{C}_\omega$.

Определение 5. Пусть $\omega \in \Omega$. Обозначим через $\tilde{C}_\omega^*$ множество тех функций $f \in \tilde{C}_\omega$, для которых

$$\lim_{h \to 0+} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\omega(h)} = 0 \quad \text{равномерно относительно } x.$$

Для любой функции $f \in \tilde{C}_\omega^*$ положим

$$\|f\|_{\tilde{C}_\omega^*} \equiv \|f\|_{\tilde{C}_\omega}. \qquad (2)$$

Теорема 2. *$\tilde{C}_\omega^*$ есть линейное множество функций, и норма, введенная формулой* (2), *превращает $\tilde{C}_\omega^*$ в пространство типа* (*B*).

Множество $\tilde{C}_\omega^*$ с введенной в ней нормой (2) будем называть пространством $\tilde{C}_\omega^*$.

Определение 6. Множество функций $f \in \tilde{C}$, для которых существует константа $K = K_f$ такая, что

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant Kh \text{ при } -\infty < x < \infty,\ 0 < h < \infty,$$

обозначим $\widetilde{Lip}\ 1$.

Лемма 3. 1) *Пусть $\omega \in \Omega$ и*

$$\lim_{u \to 0+} \frac{u}{\omega(u)} = 0.$$

Тогда $\widetilde{Lip}\ 1 \subset \tilde{C}_\omega^*$.

2) *Пусть $\omega \in \Omega$ и*

$$\lim_{u \to 0+} \frac{u}{\omega(u)} > 0.$$

Тогда $\tilde{C}_\omega = \widetilde{Lip}\ 1$ и $\tilde{C}_\omega^*$ состоит из тех и только тех f, для которых $f(x) \equiv \mathrm{const}$.

Теорема 3. *Пусть $\omega \in \Omega$, $\bar{\omega} \in \Omega$. Тогда следующие факты равносильны*:

1) $\overline{\lim\limits_{u \to 0+}} \dfrac{\bar{\omega}(u)}{\omega(u)} < +\infty$; 2) $\tilde{C}_{\bar{\omega}} \subset \tilde{C}_\omega$;

3) $\tilde{C}_{\bar{\omega}}^* \subset \tilde{C}_\omega^*$; 4) $\tilde{C}_{\bar{\omega}}^* \subset \tilde{C}_\omega$.

Теорема 4. *Пусть $\omega \in \Omega$, $\bar{\omega} \in \Omega$. Тогда следующие факты равносильны*:

1) $\lim\limits_{u \to 0+} \dfrac{\bar{\omega}(u)}{\omega(u)} = 0$; 2) $\tilde{C}_{\bar{\omega}} \subset \tilde{C}_\omega^*$.

Теорема 5. *Какова бы ни была $\omega \in \Omega$, пространство $\tilde{C}_\omega^*$ сепарабельно, а пространство $\tilde{C}_\omega$ не сепарабельно.*

3. Пусть

$$
\begin{array}{l}
x_1^{(0)} \\
x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad x_3^{(1)} \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_1^{(n)} \quad x_2^{(n)} \quad x_3^{(n)} \ldots x_{2n+1}^{(n)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\qquad (\mathfrak{M})
$$

есть матрица узлов тригонометрической интерполяции ($0 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots$ $\ldots < x_{2n+1}^{(n)} < 2\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) и пусть

$$
\begin{array}{l}
l_1^{(0)}(x) \\
l_1^{(1)}(x) \quad l_2^{(1)}(x) \quad l_3^{(1)}(x) \\
\cdots\cdots\cdots \\
l_1^{(n)}(x) \quad l_2^{(n)}(x) \quad l_3^{(n)} \ldots l_{2n+1}^{(n)}(x) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

есть матрица соответствующих фундаментальных интерполяционных тригонометрических полиномов, т. е. пусть $l_k^{(n)}(x)$ есть тот единственный тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, который удовлетворяет условиям

$$
l_k^{(n)}(x_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k \\ 0 \text{ при } i \neq k \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, 2n+1 \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}.
$$

Для любой $\mathfrak{M}$ положим

$$
\Lambda_n(\mathfrak{M}) \equiv \max_x \sum_{k=1}^{2n+1} | l_k^{(n)}(x) |.
$$

Если $f(x)$ конечна на $[0, 2\pi]$, то пусть

$$
U_n(\mathfrak{M}, f) \equiv U_n(\mathfrak{M}, f, x) \equiv \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x).
$$

Определение 7. Пусть Ω_Λ означает множество тех $\omega \in \Omega$, для которых выполнено хоть одно из следующих условий

$$
\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log n > 0 \quad \text{или} \quad \underline{\lim_{u\to 0+}} \frac{\omega[u\,\omega(u)]}{\omega(u)} > 0.
$$

Пусть Ω_{Λ^*} означает множество тех $\omega \in \Omega$, для которых

$$
\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log n = +\infty \quad \text{или} \quad \underline{\lim_{u\to 0+}} \frac{\omega[u\,\omega(u)]}{\omega(u)} > 0.
$$

Теорема 6. *Пусть* $\omega \in \Omega_\Lambda$ ($\omega \in \Omega_{\Lambda^*}$), $\mathfrak{M}$ — *заданная матрица. Тогда для того, чтобы для любой функции* $f \in \widetilde{C}_\omega$ ($f \in \widetilde{C}_\omega^*$) *имели бы*

$$
\lim_{n\to\infty} \| f - U_n(\mathfrak{M}, f) \|_{\widetilde{C}} = 0, \tag{3}
$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$
\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\mathfrak{M})\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Lambda_n(\mathfrak{M})\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty\right).
$$

Теорема 7. *Пусть* $\omega \in \Omega - \Omega_\Lambda$. *Тогда найдутся матрицы* $\mathfrak{M}'$ *и* $\mathfrak{M}''$ *такие, что*

a) $\Lambda_n(\mathfrak{M}') = \Lambda_n(\mathfrak{M}'')$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \| f - U_n(\mathfrak{M}', f) \|_{\tilde{C}} = 0$ *для любой* $f \in \tilde{C}_\omega$;

c) *существует* $f \in \tilde{C}_\omega$ *такая, что* $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \| U_n(\mathfrak{M}'', f) \|_{\tilde{C}} = +\infty$.

Теорема 8. *Пусть* $\omega \in \Omega - \Omega_{\Lambda^*}$ *и*

$$\lim_{u \to 0+} \frac{u}{\omega(u)} = 0.$$

Тогда найдутся матрицы $\mathfrak{M}'$ *и* $\mathfrak{M}''$ *такие, что*

a) $\Lambda_n(\mathfrak{M}') = \Lambda_n(\mathfrak{M}'')$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \| f - U_n(\mathfrak{M}', f) \|_{\tilde{C}} = 0$ *для любой* $f \in \tilde{C}^*_\omega$;

c) *существует* $f \in \tilde{C}^*_\omega$ *такая, что* $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \| U_n(\mathfrak{M}'', f) \|_{\tilde{C}} = +\infty$.

Следствие 1. Если $\omega \in \Omega$ и $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log n > 0$, то по любой матрице $\mathfrak{M}$ найдется $f \in \tilde{C}_\omega$ такая, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \| f - U_n(\mathfrak{M}, f) \|_{\tilde{C}} > 0. \tag{4}$$

Следствие 2. Если $\omega \in \Omega$ и $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log n = +\infty$, то по любой матрице $\mathfrak{M}$ найдется $f \in \tilde{C}^*_\omega$ такая, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \| U_n(\mathfrak{M}, f) \|_{\tilde{C}} = +\infty. \tag{5}$$

Замечание 1. Эти следствия суть обобщения известной теоремы С. Н. Бернштейна — Faber'а о том, что по любой $\mathfrak{M}$ найдется $f \in \tilde{C}$ такая, что верно (5). Следствие 1 получается из теоремы 6, если учесть, что, по известной теореме С. Н. Бернштейна, для любой $\mathfrak{M}$

$$\Lambda_n(\mathfrak{M}) > A \log n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где A — абсолютная константа.

Замечание 2. Теорема 7 означает, что если $\omega \in \Omega - \Omega_\Lambda$, то не существует никакого условия, выраженного только через $\Lambda_n(\mathfrak{M})$ и ω и такого, что

1) если это условие выполнено, то для любой $f \in \tilde{C}_\omega$ верно (3);

2) если это условие не выполнено, то существует $f \in \tilde{C}_\omega$ такая, что имеет место (4).

Аналогичное замечание можно сделать относительно теоремы 8.

Результаты, аналогичные изложенным, справедливы для интерполяции посредством обыкновенных полиномов; однако условие $\lim\limits_{u \to 0+} \frac{\omega[u\,\omega(u)]}{\omega(u)} > 0$ там заменяется условием $\lim\limits_{u \to 0+} \frac{\omega(u^2)}{\omega(u)} > 0$.

Поступило
12 I 1948