Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 8

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ВТОРАЯ ЗАМЕТКА ОБ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССАХ

1. Дополним некоторые результаты заметки ([1]) для случая одной переменной и приступим затем к приложению того же метода к функциям нескольких переменных.

Добавление к теореме 1 ([1]). *Все функции $f(x)$, принадлежащие некоторому данному специальному однородному телу непрерывности $f(x) \in S_q(p_1, \ldots, p_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k; M)$ порядка q радиуса M, принадлежат основному однородному классу Ω_q порядка q, причем*

$$\sup_{f(x) \in S_q(p_i;\ \alpha_i;\ M)} n^q A_n f(x) = Mc(S_q(p_i; \alpha_i)), \tag{1}$$

где постоянная $c(S_q(p_i; \alpha_i))$ не зависит от n.

Это дополнение к теореме 1 заметки ([1]) вытекает из того, что лемма 1 ([1]) применима к специальным однородным телам так же, как и к основному однородному телу $\Omega_q(R)$.

2. Первое добавление к следствию 5 ([1]). *Всякий специальный класс $S_q^{(m)}(p_i; \alpha_i)$ порядка q с характеристикой $m > q$ включает все специальные однородные классы $S_q^{(m')}(p_i'; \alpha_i')$ с характеристикой $m' \leqslant m$.*

(Это утверждение содержится в следствии 5 ([1]) при дополнительном предположении ограниченности функций $f(x)$).

В самом деле, если $f(x) \in S_q^{(m')}(p_i'; \alpha_i'; M)$, то целая функция степени n_0, определенная формулой (([1]), формула (5))

$$g_{n_0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t) \sum_i p_i' f\left(x + \frac{\alpha_i' t}{n_0}\right) dt, \tag{4^1}$$

осуществляющая неравенство*

$$|f(x) - g_{n_0}(x)| < \frac{C_q M}{n_0^q}, \tag{5^1}$$

---

* При применении на практике формулы (4^1) полезно напомнить, что оценка погрешности (5^1) справедлива при соблюдении лишь двух условий: $\sum\limits_i p_i' = \pm 1$, $|\alpha_i'| \geqslant 1$. Легко проверить, что при любых p_i' тело $S_q(p_i'; \alpha_i'; M) = S_q(p_i''; \alpha_i''; M/p_{i_0}')$, каково бы ни было i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant k)$, если положить $\alpha_i'' = \alpha_i' - \alpha_{i_0}'$, $p_i'' = p_i'/p_{i_0}'$ при $i \neq i_0$, и $\alpha_{i_0}'' = \alpha_{i_0}'$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i'' = 1$. Таким образом, если можно выбрать i_0 так, чтобы все $|\alpha_i''| \geqslant 1$, заменяя в формуле (4^1) p_i' и α_i' через p_i'' и α_i'', мы получим в правой части неравенства (5^1) $Mc_q / p_{i_0}' n^q$ вместо Mc_q / n^q. Например, если

принадлежит, согласно следствию 2 [1], телу того же специального класса $S_q^{(m')}(p'_i;\alpha'_i)$ (с радиусом $M\sum_i |p'_i|$), и при помощи леммы 2 [1] и леммы [2] нетрудно показать, что $g^*_{n_0,m}(x)=g_{n_0}(x)-\left[g_{n_0}(0)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+g^{m-1}_{n_0}(0)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\right]\to 0$ при соответствующем подборе последовательности $n_0\to 0$, каково бы ни было $m\geqslant m'$. С другой стороны, вследствие теоремы 3 [1], каков бы ни был специальный класс $S_q^{(m)}(p_i;\alpha_i)$ с характеристикой $m>q$, из (5^1) следует

$$\left|\sum_i p_i[f(x+\alpha_i h)-f(x)]-\sum_i p_i[g_{n_0}(x+\alpha_i h)-g_{n_0}(x)]\right|<Lh^q, \qquad (2)$$

где постоянная L не зависит от n_0. Поэтому вследствие

$$\sum_i p_i[g_{n_0}(x+\alpha_i h)-g_{n_0}(x)]=\sum_i p_i[g^*_{n_0,m}(x+\alpha_i h)-g^*_{n_0,m}(x)]\to 0$$

при $n_0\to 0$ для всех $m\geqslant m'$, неравенство (2) приводится к

$$\left|\sum_i p_i[f(x+\alpha_i h)-f(x)]\right|\leqslant Lh^q. \qquad (3)$$

Следствие 6. *Все однородные специальные классы $S_q^{(m_0)}(p_i;\alpha_i)$ порядка q, имеющие ту же характеристику m_0, эквивалентны.*

Это утверждение (очевидное для вырожденных классов $m_0<q$, так как по теореме 2 [1] последние состоят лишь из многочленов степени $<m_0$) вытекает непосредственно из предыдущего в случае $m_0>q$. Остается рассмотреть случай $m_0=q$ (критический класс), когда теорема 3 [1] неприменима. Полагая тогда $m'=m=q$ в предыдущем рассуждении, введем соответственные характеристические указатели $N=\frac{1}{m!}\sum_i p_i\alpha_i^m$, $N'=\frac{1}{m!}\sum_i p'_i\alpha_i'^m\gtrless 0$ классов $S_m^{(m)}(p_i,\alpha_i)$, $S_m^{(m)}(p'_i,\alpha'_i)$. Пусть $\mu N'=N$; в таком случае для всех целых $s\leqslant m$, $\sum_i p'_i\alpha_i'^s-\sum_i p_i\alpha_i^s=0$. Обозначив через $m_1>m$ наименьшее целое число, для которого $\mu\sum_i p'_i\alpha_i'^{m_1}-\sum_i p_i\alpha_i^{m_1}\gtrless 0$ (применяя рассуждение, посредством которого была доказана теорема 3 [1], где теперь роль характеристики m_0 будет исполнять $m_1>q$), мы получим тогда вместо (2) неравенство вида

$$\Big|\mu\sum_i p'_i[f(x+\alpha'_i h)-f(x)]-\mu\sum_i p_i[f(x+\alpha_i h)-f(x)]- \qquad (2^{\text{bis}})$$
$$-\mu\sum_i p'_i[g_{n_0}(x+\alpha'_i h)-g_{n_0}(x)]+\sum_i p_i[g_{n_0}(x+\alpha_i h)-g_{n_0}(x)]\Big|<Lh^q.$$

$\left.\Delta_h^{(2s)}f(x)\right|=\left|\sum_{l=1}^{2s}(-1)^l C_{2s}^l[f(x+ih)-f(x)]\right|\leqslant Mh^q$, то, полагая $i_0=s$, после соответствующей замены $g_n(x)$, получим

$$|f(x)-g_n(x)|<\frac{Mc_q}{C_{2s}^s n^q}<\frac{Mc_q\sqrt{s}}{2^{2s-1}n^q}.$$

Так как функция $g_{n_0}(x)$ та же, что и раньше, то из (2^{bis}) вытекает также неравенство

$$\mu \sum_i p_i' [f(x+\alpha_i' h) - f(x)] - \sum_i p_i [f(x+\alpha_i h) - f(x)] \leqslant Lh^q, \quad (3^{\text{bis}})$$

которое и выражает эквивалентность обоих классов.

Таким образом, если нам не нужно рассматривать радиусы различных специальных однородных тел непрерывности, к которым принадлежит данная функция $f(x)$, мы можем коротко обозначить через $f(x) \in S_q^{(m)}$ факт принадлежности $f(x)$ к специальным классам $S_q^{(m)}(p_i; \alpha_i)$. Кроме того, выражая через $f(x) \in S_q^*(M)$ условие Липшица порядка $q = k + \delta$, где $k \geqslant 0$ — целое число и $0 < \delta \leqslant 1$, данного радиуса M

$$\left| f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x) \right| \leqslant Mh^\delta \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (4)$$

и через $f(x) \in S_q^*$ — это же условие с произвольным M, при помощи аналогичных рассуждений устанавливаем

Следствие 7. *Все специальные классы $S_q^{(m)}$ порядка q с характеристикой m, где $q \leqslant m < q+1$, эквивалентны* классу Липшица S_q^* порядка $q = k + \delta$, где целое число $k = m - 1 \geqslant 0$, т. е. $S_{k+\delta}^{(k+1)} = S_{k+\delta}^*$ $(0 < \delta \leqslant 1)$.*

Аналогично доказывается

Следствие 8. *Если $f(x) \in S_q^{(k+1)}$, где $q \leqslant k+1$, то $f^{(i)}(x) \in S_{q-i}^{(k+1)}$ при всяком целом $i < q$.*

3. В формулировке предыдущих следствий (в которых, в отличие от следствия 5 заметки ([1]), на функцию $f(x)$ не накладывается никаких ограничений) мы не можем утверждать эквивалентность классов $S_q^{(m)}$ и Ω_q, хотя при доказательстве мы существенно пользовались теоремами 1 ([1]) и 3 ([1]). Действительно, если $f(x) \in S_q^{(m)}$, то, какова бы ни была функция $F_0(x)$ нулевой степени, $f(x) + F_0(x) = f_0(x) \in \Omega_q$, а между тем $f_0(x) \in S_q^{(m)}$ лишь тогда, когда ([1]) целая функция нулевой степени $F_0(x)$ есть многочлен степени не выше m. Из этого замечания вытекает

Второе добавление к следствию 5 ([1]). *Для функций $f(x)$, подчиненных двум дополнительным условиям $A_0 f(x) < \infty$, $\overline{\lim\limits_{x=\pm\infty}} (f(x) / x^m) < \infty$ (которые независимы за исключением случая $m_0 = 0$), классы $S_q^{(m)}$ и Ω_q эквивалентны при всех $q < m$.*

Для получения соответствующей эквивалентности без наложения каких бы то ни было дополнительных ограничений на функцию $f(x)$ следует расширить классы Ω_q и $S_q^{(m)}$, сообразуясь с теоремой 3 ([1]). Введем следующие определения: назовем основным однородным телом $\Omega_q^{(t)}(R)$ порядка q радиуса R свободным (или расширенным) до степени t совокупность всех функций $f(x)$, для которых

$$A_n f(x) \leqslant R / n^q \qquad (n \geqslant t);$$

иными словами, $f(x) \in \Omega_q^{(t)}(R)$, если существует целая функция $g_t(x)$ степени не выше t такая, что функция $f_t(x) = f(x) - g_t(x)$ ограни-

---

* Рассмотрение $A_n f(x)$ существенно лишь для утверждения $S_{k+\delta}^{(k+1)} \subset S_{k+\delta}^*$. Доказательство того, что $S_{k+\delta}^* \subset S_{k+\delta}^{(k+1)}$, получается известным элементарным способом дифференцирования равенства $\sum p_i [f(x+\alpha_i h) - f(x)] = Hh^{k+\delta}$, приводящего к неравенству $(1+\delta) \ldots (k+\delta) H < M \sum |p_i| \, |\alpha_i|^{k+\delta}$ (которое можно еще улучшить).

чена и принадлежит основному телу $\Omega_q(R)$ $(f_t(x) \in \Omega_q(R))$. Точно так же специальным однородным телом $\sigma_q(p_i; \alpha_i; M)$ порядка q радиуса M свободным до степени t назовем совокупность всех функций $f(x)$, которые могут быть представлены в виде суммы $f(x) = g_t(x) + f_t(x)$, где $g_t(x)$ есть целая функция степени не выше t, а функция $f_t(x) \in S_q(p_i; \alpha_i; M)$ ограничена. Классами $\Omega_q^{(t)}$ и $\sigma_q(p_i; \alpha_i)^{(t)}$ называем, соответственно, совокупность тел $\Omega_q^{(t)}(R)$ и $\sigma_q(p_i; \alpha_i; R)^{(t)}$ при любых $R < \infty$. Из следствия 5(1) непосредственно вытекает

Третье добавление к следствию 5 (1). *Свободный до степени t основной класс $\Omega_q^{(t)}$ эквивалентен всем специальным однородным классам $\sigma_q^{(m)}(p_i; \alpha_i)^{(t)}$, свободным до той же степени t с характеристикой $m > q$.*

4. Переходя к однородным классам функций нескольких переменных, ограничимся, для простоты письма, функциями $f(x, y)$ двух переменных (x, y), причем из хода рассуждений будет ясно, что выводы не зависят от числа переменных. Мы говорим, что $f(x, y) \in \in xS_{\lambda_1}^{(m_1)}(p_i; \alpha_i; M_1) \cdot yS_{\lambda_2}^{(m_2)}(q_j; \beta_j; M_2)$, если при всех (x, y), $|h'| \leqslant h$

$$\left|\sum_i p_i[f(x + \alpha_i h', y) - f(x, y)]\right| \leqslant M_1 h^{\lambda_1},$$

$$\left|\sum_j q_j f(x, y + \beta_j h') - f(x, y)]\right| \leqslant M_2 h^{\lambda_2}, \tag{5}$$

т. е. если $f(x, y) \in S_{\lambda_1}^{(m_1)}(p_i; \alpha_i; M_1)$ по x и $f(x, y) \in S_{\lambda_2}^{(m_2)}(q_j; \beta_j; M_2)$ по y. Точно так же мы пишем $f(x, y) \in xS_{\lambda_1}^{*}(M_1) \cdot yS_{\lambda_2}^{*}(M_2)$, если $f(x, y) \in \in S_{\lambda_1}^{*}(M_1)$ по x и $f(x, y) \in S_{\lambda_2}^{*}(M_2)$ по y. Аналогичным образом определяются специальные однородные классы функций двух переменных: $f(x, y) \in S_{\lambda_1}^{(m_1)}(p_i; \alpha_i) \cdot yS_{\lambda_2}^{(m_2)}(q_j; \beta_j)$, если $f(x, y) \in S_{\lambda_1}^{(m_1)}(p_i; \alpha_i)$ по x и $f(x, y) \in S_{\lambda_2}^{(m_2)}(q_j; \beta_j)$ по y.

Теорема 4. *Если $f(x, y) \in xS_{\lambda_1}^{(m_1)}(p_i; \alpha_i; M_1) \cdot yS_{\lambda_2}^{(m_2)}(q_j; \beta_j; M_2)$ и $A_{n_1, n_2} f(x, y)$ означает наилучшее приближение функции $f(x, y)$ $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$ при помощи целых функций* степени n_1 по x и степени n_2 по y, то* (*полагая* $\sum_i p_i = \sum_j q_j = 1$, $|\alpha_i| \geqslant 1$, $|\beta_j| \geqslant 1$)

$$A_{n_1 n_2} f(x, y) < \frac{M_1 c_{\lambda_1}}{n_1^{\lambda_1}} + \frac{M_2 P c_{\lambda_2}}{n^{\lambda_2}}, \quad A_{n_1 n_2} f(x, y) < \frac{M_1 Q c_{\lambda_1}}{n_1^{\lambda_1}} + \frac{M_2 c_{\lambda_2}}{n_2^{\lambda_2}}, \tag{6}$$

где $P = \sum |p_i|$, $Q = \sum |q_j|$, *а* c_{λ_1} *и* c_{λ_2} *определяются формулами* (8).

Для построения целой функции, осуществляющей (6), положим

$$g_{n_1 n_2}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(t_1)\, G(t) \sum_{i, j} p_i q_j f\left(x + \frac{\alpha_i t_1}{n_1}, y + \frac{\beta_j t}{n_2}\right) dt_1 dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \sum_j q_j\, g_{n_1}\left(x, y + \frac{\beta_j t}{n_2}\right) dt =$$

$$= n_1 n_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z_1, z) \sum_{i, j} \frac{p_i q_j}{\alpha_i \beta_j} G_1\left(\frac{n_1(z_1 - x)}{\alpha_i}\right) G\left(\frac{n_2(z - y)}{\beta_j}\right) dz_1 dz, \tag{7}$$

* Мы говорим, что $g_{n_1, n_2}(x, y)$ есть целая функция степени n_1 по x и степени n_2 по y, если она регулярна при всех комплексных значениях (x, y), причем, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое значение R, что $|g_{n_1, n_2}(x, y)| < e^{|x|(n_1+\varepsilon)+|y|(n_2+\varepsilon)}$, каковы бы ни были $|x| \geqslant R$, $|y| \geqslant R$.

обозначая через $g_{n_1}(x, y)$ целую функцию степени n_1 по x (содержащую y в качестве параметра), введенную в заметке ([1])

$$g_{n_1}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t_1) \sum_i p_i f\left(x + \frac{\alpha_i t_1}{n_1}, y\right) dt_1 =$$

$$= n_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(z, y) \sum_i \frac{p_i}{\alpha_i} G_1\left(\frac{n_1(z_1 - x)}{\alpha_i}\right) dz_1,$$

где $G_1(t) \geqslant 0$, $G(t) \geqslant 0$ $(-\infty < t < \infty)$ любые целые функции первой степени, подчиненные условиям*

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)\, dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t) |t|^{\lambda_1} dt = c_{\lambda_1},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t) |t|^{\lambda_2} dt = c_{\lambda_2}. \tag{8}$$

Действительно, учитывая ([1]), что $\sum p_i = \sum q_j = 1$ и $|f(x, y) - g_{n_1}(x, y)| < M_1 c_{\lambda_1} / n_1^{\lambda_1}$, и замечая, что вследствие (7) и (5)

$$|g_{n_1 n_2}(x, y) - g_{n_1}(x, y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \sum_j q_j \left[g_{n_1}\left(x, y + \frac{\beta_j t}{n_2}\right) - g_{n_1}(x, y)\right] dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t_1)\, G(t) \sum_{i, j} p_i q_j \left[f\left(x + \frac{\alpha_i t_1}{n_1}, y + \frac{\beta_j t}{n_2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f\left(x + \frac{\alpha_i t_1}{n_1}, y\right)\right] dt_1 dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t_1)\, G(t) \sum_i |p_i| M_2 \left|\frac{t}{n_2}\right|^{\lambda_2} dt_1 dt = \frac{M_2 P c_{\lambda_2}}{n_2^{\lambda_2}}, \tag{9}$$

получаем

$$|f(x, y) - g_{n_1, n_2}(x, y)| < \frac{M_1 c_{\lambda_1}}{n_1^{\lambda_1}} + \frac{M_2 P c_{\lambda_2}}{n_2^{\lambda_2}}; \tag{6^1}$$

---

* Так как из (5) вытекает $\overline{\lim\limits_{\substack{x = \pm\infty \\ y = \pm\infty}}} \left(f(x, y) / x^{m_1} y^{m_2}\right) < \infty$, то в общем случае ([1]) необходимо (и достаточно), кроме того, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(t) |t|^{m_1} dt < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} G(t) |t|^{m_2} dt < \infty.$$

таким же образом, изменяя последовательность преобразований, получаем

$$\left| f(x, y) - g_{n_1, n_2}(x, y) \right| < \frac{M_1 Q c_{\lambda_1}}{n_1^{\lambda_1}} + \frac{M_2 c_{\lambda_2}}{n_2^{\lambda_2}}. \qquad (6^2)$$

В частности, полагая $n_1 = n_2 = n$, $\lambda_1 = \lambda_2$, получим

$$A_{n, n} f(x, y) < A / n^{\lambda_1}, \text{ где } A = \sup c_{\lambda_1}(M_1 + M_2 P, M_1 Q + M_2). \qquad (10)$$

Из различных следствий, которые вытекают из (10), отметим, что ряд $f(x, y) = g_{n_0, n_0}(x, y) + \sum_{i=0}^{\infty} [g_{n_{i+1}, n_{i+1}}(x, y) - g_{n_i, n_i}(x, y)]$, где $n_{i+1} = bn_i$ $(b > 1)$, может быть почленно дифференцирован k раз по x и l раз по y, лишь бы $k + l = v < \lambda_1$ и

$$A_{n, n} \partial^k f(x, y) / \partial x^k \partial y^l < R_v A / n^{\lambda_1 - v} \quad (R_v = \text{мин}\,(b^{\lambda_1} + 1)\, b^{\lambda_1 - v + 1} / (b - 1))$$

(в случае ограниченности $f(x, y)$, ограничены и $\partial^v f(x, y) / \partial x^k \partial y^l$).

При помощи следствия 8 получаем* отсюда

Следствие 9. *Если* $f(x, y) \in xS_{v+\delta}^{(v+m)} \cdot yS_{v+\delta}^{(v+m)}$ $(m > \delta > 0)$, *то* $\partial^v f(x, y) / \partial x^k \partial y^l \in xS_{\delta}^{(v+m)} \cdot yS_{\delta}^{(v+m)}$ (*в случае ограниченности* $f(x, y)$, $\partial^v f(x, y) / \partial x^k \partial y^l \in xS_{\delta}^{(m')} \cdot yS_{\delta}^{(m')}$ *при всяком* $m' > \delta$).

Поступило
21 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, **57**, № 2 (1947). [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, **52**, № 7 (1946). [3] С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Харьков, 1912.

---

* Следствие 9 является обобщением и усилением теоремы 8 (стр. 142) моей докторской диссертации ([3]).