

П. Е. КРАСНУШКИН

РАСЧЕТ ИНТЕРФЕРОМЕТРА ПИРСА

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 15 II 1940)

Существующие в настоящее время расчеты интерферометра Пирса <sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>, <sup>(3)</sup>, на основании которых производится обработка экспериментальных данных, построены на предположении, что излучатель колеблется, как плоский поршень. В действительности распределение амплитуд колебаний на поверхности излучателя всегда неоднородно. Можно считать установленным <sup>(4)</sup>, <sup>(5)</sup>, что пренебрежение этим фактом в расчете вызывает значительные ошибки при определении фазовой скорости и коэффициента затухания из экспериментальных кривых реакции интерферометра. Кроме этого упомянутая теория не дает рационального объяснения ряду особенностей кривых реакции, о которых будет сказано ниже. Такое положение вещей указывает на необходимость построения новой теории интерферометра, в которой был бы учтен факт неоднородного распределения амплитуд колебаний на поверхности излучателя, и которая давала бы указания для его конструкции.

В этой статье дан расчет интерферометра, состоящего из полого металлического цилиндра, одним основанием которого является отражатель, а другим—плоский излучатель с произвольным распределением амплитуд на поверхности. Распространение звуковых волн в исследуемой среде, заполняющей цилиндр, характеризуется фазовой скоростью  $v$  и коэффициентом затухания  $\alpha$ , учитывающим потери в неограниченной среде. Согласно гидродинамической теории Стокса-Кирхгоффа <sup>(6)</sup>

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2v^3} \left\{ \mu' + \mu'' + \nu \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \right\}, \quad (1)$$

где  $\omega$ —циклическая частота,  $\mu'$  и  $\mu''$ —коэффициенты вязкости,  $\nu$ —коэффициент теплопроводности и  $\gamma$ —отношение теплоемкостей.

Полное решение задачи представляет значительные трудности. Мы упрощаем задачу, пренебрегая потерями на стенках, для чего будем считать их абсолютно твердыми, нетеплопроводными и допускающими свободное скольжение. При этих условиях можно предположить существование потенциала скорости  $\varphi$ . Выделяя временной фактор  $e^{i\omega t}$ , получим уравнение для потенциала скорости:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (2)$$

Здесь  $k = \beta + \alpha i$ —комплексное волновое число, характеризующее распространение звука в неограниченной среде  $\left( \beta = \frac{\omega}{v} \right)$ . Располагая оси координат так, что ось  $OZ$  направлена вдоль образующей цилиндра, а  $XOY$  совпадает с плоскостью отражателя, запишем граничные условия:

$$\text{на боковых поверхностях цилиндра } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\text{при } z = l \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = F(x, y), \quad (5)$$

где  $F(x, y)$ —распределение амплитуд нормальных компонент скорости на поверхности кварца.

Расчет Релея (1. с., § 350) дает нам основание считать, что такая идеализация не портит результаты приводимого ниже расчета, если на заданной частоте  $\omega$  величины  $\mu'$ ,  $\mu''$  и  $\nu$  можно рассматривать малыми, а сечение цилиндра большим.

Следуя методу Релея (1. с., § 301), ищем частное решение уравнения (2) в форме плоской волны, бегущей вдоль  $OZ$ :

$$\varphi = \psi(x, y) e^{\pm imz}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2), получим уравнение для  $\psi$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (k^2 - m^2)\psi = 0. \quad (7)$$

Обозначив  $k^2 - m^2$  через  $\chi^2$  и требуя, чтобы на границах сечения согласно (3)  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  обращалось в 0, мы выделяем дискретный ряд собственных значений  $\chi_j^2$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) и соответствующий им ряд собственных функций  $\psi_j$ . Таким образом вдоль трубы могут распространяться плоские волны различного типа. Каждый тип волны характеризуется своим распределением амплитуд по сечению трубы  $\psi_j$  и коэффициентом распространения  $m_j = \beta_j + \alpha_j i$ , который определяется через соответствующие собственные значения  $\chi_j^2$ ;  $m_j^2 = k^2 - \chi_j^2$ . Выделяя действительную и мнимую часть  $m_j$ , получим:

$$2\beta_j^2 = (\beta^2 - \alpha^2 - \chi_j^2) + \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2 - \chi_j^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}, \quad (8)$$

$$2\alpha_j^2 = -(\beta^2 - \alpha^2 - \chi_j^2) + \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2 - \chi_j^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}. \quad (9)$$

Как видно, фазовая скорость и коэффициент затухания таких волн зависят не только от свойств среды, но и от величины  $\chi_j$ .

$\chi_0 = 0$  соответствует обычная плоская волна с однородным фронтом. Чем выше номер  $\chi_j$ , тем сложнее структура волны и тем больше ее фазовая скорость  $v_j$  и коэффициент затухания  $\alpha_j$ . Волны, для которых  $\chi_j$  порядка  $\beta$ , имеют столь большой  $\alpha_j$ , что практически исчезают на протяжении нескольких длин волн. Если  $\alpha = 0$ , то волны, для которых  $\chi_j \geq \beta$ , вообще не распространяются.

Общее решение (1) ищем в форме суперпозиции всех типов волн:

$$\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x, y) [C_j' e^{im_j z} + C_j'' e^{-im_j z}]. \quad (10)$$

Очевидно, граничное условие (3) удовлетворяется само собой. Условие (3) будет удовлетворено, если положить  $C_j'' = C_j'$ . Для того чтобы удовлетворить условию (5), разложим функцию распределения скоростей  $F(x, y)$  по собственным функциям  $\psi_j$ :

$$F(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \psi_j(x, y), \quad (11)$$

где  $A_j$ —коэффициент Фурье.

В результате получим мгновенное значение потенциала скоростей:

$$\varphi = e^{i\omega t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j \psi_j}{im_j} \cdot \frac{e^{im_j z} + e^{-im_j z}}{e^{im_j l} - e^{-im_j l}}. \quad (12)$$

Определим энергию, которую теряет кварцевая пластинка на излучение

$$\frac{dW}{dt} = \iint \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=l} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=l} \cdot ds \quad (13)$$

Здесь интегралы взяты по всей поверхности излучателя, а  $\rho$  — плотность среды. Подставляя (12) в (13) и усредняя по времени, получим:

$$\frac{\rho \omega}{2} \iint \left\{ \sum_j \frac{A_j \psi_j}{\beta_j^2 + \alpha_j^2} [\beta_j R \operatorname{ctg} m_j l] + \alpha_j J (\operatorname{ctg} m_j l) \right\} \cdot \sum_k A_k \psi_k \Big\} ds. \quad (14)$$

Здесь  $R$  и  $J$  — действительная и мнимая часть функций. Меняя знаки суммы и интегралов местами и принимая во внимание, что  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_j, \dots$  ортогональная и нормированная система функций, получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\rho \omega}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j^2}{\beta_j^2 + \alpha_j^2} [\beta_j R (\operatorname{ctg} m_j l) + \alpha_j J (\operatorname{ctg} m_j l)]. \quad (15)$$

Изменение анодного тока генератора, по которому обычно регистрируется реакция столба газа на излучатель, можно считать пропорциональным изменению энергии, теряемой на излучение, если последнее

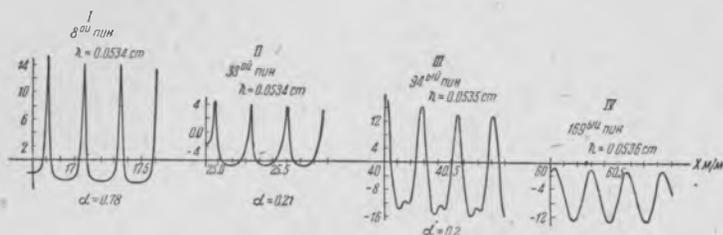
мало. Таким образом  $\frac{dW}{dt}$  — кривая реакции. Член  $\alpha_j J (\operatorname{ctg} m_j l)$  играет роль лишь для высоких номеров  $j$ , и им можно пренебречь, так как эти компоненты волны быстро затухают, и излучение их не зависит от  $l$ . Ограничивая суммирование номером  $N$  ( $\beta_N \gg \alpha_N$ ), получим кривую реакции

$$J(l) \approx \sum_{j=0}^N \rho v_j A_j^2 R (\operatorname{ctg} m_j l). \quad (16)$$

Здесь  $\rho v_j$  — акустическое сопротивление волны типа  $\chi_j$ , а  $m_j$  определены выражениями (8) и (9). Согласно (16) полная кривая реакций является суперпозицией элементарных кривых реакции вида  $R (\operatorname{ctg} m_j l)$ , каждая из которых создана соответствующим типом волны  $\chi_j$ . Обычная теория рассматривает только первый член выражения (16).

Согласно (8) элементарные кривые реакции отличаются друг от друга расстоянием между пиками  $\frac{\lambda_l}{2}$ , поэтому если бы затухание было очень мало, то полная кривая реакции имела бы вид линейчатого спектра, аналогичного спектру диффракционной решетки. Таким образом интерферометр Пирса, наполненный средой с малым затуханием, является анализатором, разлагающим распределение амплитуд на кварце  $F(x, y)$  по собственным функциям  $\psi_j$ . Затухание значительно понижает «разрешающую способность» интерферометра; оно обуславливает конечную ширину пик, и поэтому пики низких номеров  $j$  сливаются в одну общую кривую. Только в тех случаях, когда колебание кварца столь неоднородно, что в разложении  $F(x, y)$  доминируют отдельные функции  $\psi_j$  высоких номеров  $j$ , в кривой реакции появляются отдельные дополнительные пики. Такие пики наблюдались рядом авторов (<sup>1, 7, 8, 9, 10</sup>) и каждый давал им свое объяснение. На фигуре приведена кривая из работы Пильмайера (<sup>1</sup>). Она интересна тем, что пик, соответствующий высокому номеру  $j$ , значительно интенсивнее пика от обычной плоской волны, который при малых  $l$  сливается с большим пиком, делая его подъем более плавным, чем спуск (кривая I). По мере увеличения  $l$  он отстает и отделяется от большого пика (кривая III). На кривой IV он опять сливается с большим пиком только предыдущего порядка, делая теперь спуск мягче подъема. Пильмайер объяснял этот факт тем, что среда нелинейна (<sup>1</sup>). В своей последней работе (<sup>9</sup>), озаглавленной «Акустический метод обнаружения слабых электрических колебаний кварца», он отказался от этой гипотезы

и предполагает, что дополнительные максимумы вызваны паразитными частотами кварца, которые не могут быть обнаружены электрическими способами. Экспериментальные материалы Пильмайера с точки зрения изложенной выше теории могут быть интерпретированы так: в излучении кварцевых пластин среза  $X$  доминирует плоская волна типа  $\chi_0$ , в срезах  $Y$  таковая почти отсутствует. Другие авторы (8) объясняли дополнительные пики нарушением параллельности между плоскостями кварца и отражателя, но согласно формуле (16) дополнительные пики существуют и при строгой параллельности.



В отличие от диффракционной решетки разрешающая способность интерферометра не возрастает с увеличением порядка спектра, т. е. с ростом  $l$ , так как эффект дисперсии компенсируется затуханием, которое вызывает расползание и уменьшение высоты максимумов с ростом  $l$ . Таким образом, если, как обычно, доминирует плоская волна, то пики высоких номеров не разрешаются с ростом  $l$ , и основной пик будет всегда состоять из некоторого числа элементарных пик. По мере роста  $l$  он будет медленно изменять свою форму, асимптотически приближаясь к форме пика однородной плоской волны, так как пики высоких номеров  $\chi_j$ , согласно (9), затухают быстрее. На фигуре приведены результаты измерения  $\alpha$  из ширины пика в предположении, что справедлива старая теория интерферометра. Как видно, при малых  $l$  вычисленное  $\alpha$  значительно больше истинного, равного 0,09. Это указывает на неоднородность колебаний кварца. При больших  $l$   $\alpha$  стремится к истинному. Определение  $\alpha$  по ширине пика является критерием для применения обычных формул расчета (3). Если кварцевая пластинка колеблется неоднородно, то обработка по этим формулам кривых реакций даст в первую очередь завышенное значение коэффициента абсорбции (4), так как из-за дисперсии и более быстрого затухания пик высоких номеров полная кривая реакции спадает быстрее, чем элементарная кривая от  $\chi_0$ . Кроме того при малых  $l$  пики высоких номеров  $\chi_j$  могут значительно увеличить расстояния между пиками полной кривой реакции и привести к ошибкам в измерении длины волны (5, 9). Обработка кривых реакции с помощью формул обычной теории (1, 2, 3) возможна лишь, если  $F(x, y)$  совпадает по форме с одной из функций  $\psi_j(x, y)$  (если  $j$  невелико).

Необходимо отметить, что в этом расчете не были учтены эффекты вязкости и теплопроводности также и на плоскостях  $z=0$  и  $z=l$ , которые могут сказаться на форме кривой реакции при малых  $l$  (8).

Поступило  
16 II 1940

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> W. H. Pilmeyer, Phys. Rev., **34**, 4187 (1929). <sup>2</sup> J. S. Hubbard, Phys. Rev., **38**, 1011 (1931). <sup>3</sup> Л. Белявская, Изв. Акад. Наук СССР, № 7 (1935). <sup>4</sup> Е. И. Пумпер, Journal of Physics, **1**, № 5—6 (1939). <sup>5</sup> E. Grossmann, J. Acous. Soc. Am., **6**, 106 (1934). <sup>6</sup> Rayleigh, The theory of sound, II, § 349 (1896). <sup>7</sup> Klein and Hershberger, Phys. Rev., **37**, 760 (1931). <sup>8</sup> R. S. Alleman, Phys. Rev., **55**, 87 (1939). <sup>9</sup> W. H. Pilmeyer, J. Acous. Soc. Am., **9**, № 3 (1938). <sup>10</sup> Eucken and Becker, ZS. f. phys. Chemie, **27**, 219 (1934).