

Л. И. ГУТЕНМАХЕР

**ИСКУССТВЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МНОГОМЕРНЫХ  
ТЕЛ**

(Представлено академиком В. Ф. Миткевичем 20 II 1940)

1. Огромное число проблем науки и техники сводится к решению краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. Трудности, возникающие при решении этих задач, во многих случаях не могут быть преодолены средствами современной математики. В связи с этим возникло стремление решать такие задачи, пользуясь явлениями природы в каком-либо известном их проявлении, удобном для непосредственного измерения искомых величин. Особенно много усилий было направлено к применению для этой цели электрических явлений<sup>(1, 2, 3)</sup>, однако все известные электрические методы пригодны для решения одного только уравнения Лапласа. Для решения уравнения Фурье имеются способы<sup>(4, 5)</sup>, основанные на свойствах движения жидкости в системе сосудов, но устройство получается при этом весьма громоздким. Известные в электротехнике схемы замещения<sup>(6)</sup> можно условно отнести также к методам решения краевых задач, но примененные только в одномерном пространстве.

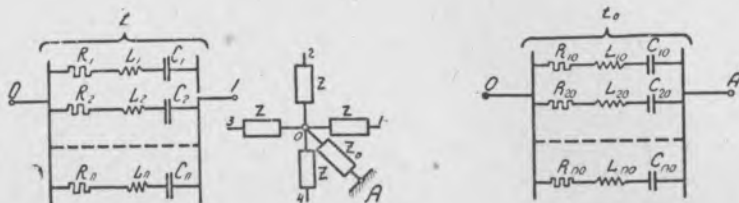
Для решения особенно сложных краевых задач широкое развитие получила практика физического моделирования явлений на основе теории подобия и теории размерностей<sup>(7)</sup>.

На основе критического анализа всех этих физических методов, а также используя данные разностного метода решения дифференциальных уравнений в частных производных<sup>(8-15)</sup>, автор разработал новый универсальный метод решения краевых задач при помощи искусственных электрических моделей многомерных тел.

2. Искусственные модели тел (поля физических констант) состояются из элементов («кирпичей»)  $Z$  и  $Z_0$ , являющихся токоведущими частями электрической цепи.  $Z$  и  $Z_0$  состоят из различных комбинаций сосредоточенных постоянных: сопротивлений  $R$ , индуктивностей  $L$  и емкостей  $C$  (см., например, фиг. 1), имеющих определенную структуру соединения, соответствующую физическим свойствам каждого данного тела. Для построения моделей  $n$ -мерных тел введены обобщенные координаты, представляющие независимые между собой числа, однозначно определяющие положение каждой узловой точки соединения элементов  $Z$  в электрической модели. Элементы  $Z_0$  соединяются с узловыми точками сетки. Вторые концы  $Z_0$  соединяются между собой накоротко. На фиг. 2 представлена сетка, составленная из элементов  $Z$  и  $Z_0$ . Приняв одну из узловых точек сетки за начало отсчета и условившись в качестве единицы

измерения принять число элементов равным  $l_0 = \frac{1}{h}$ , можно однозначно определить остальные узловые точки двумя числами  $x$  и  $y$  в выбранной системе координат. Из ряда сеток, путем их соединения элементами  $Z$ , можно составить решетку (фиг. 3).

Для построения искусственной электрической модели некоторого данного тела, ограниченного поверхностью  $S$ , мы выражаем форму тела



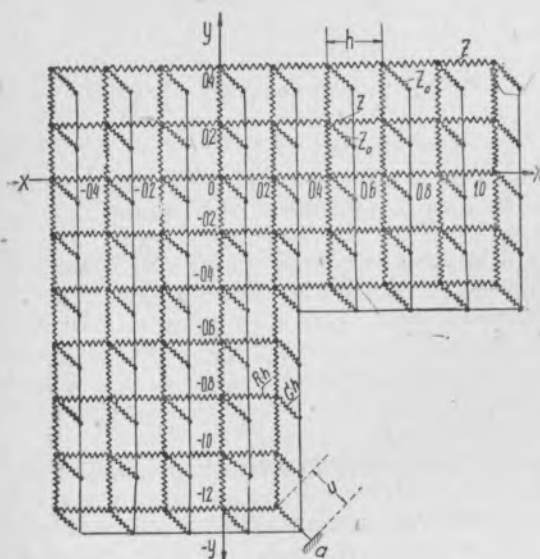
Фиг. 1.

в относительных координатах и строим такую электрическую модель, чтобы отношение линейных размеров тела  $l'_1, l'_2, \dots, l'_n$  к числу элементов  $Z$  в соответствующих сходственных частях электрической модели  $l''_1, l''_2, \dots, l''_n$  было постоянным

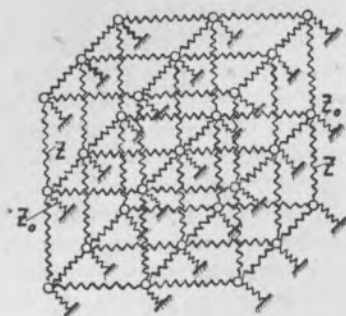
числом  $c_l$  (в пределах заданной степени точности):

$$\frac{l'_1}{l''_1} = \frac{l'_2}{l''_2} = \dots = \frac{l'_n}{l''_n} = c_l.$$

3. Пользуясь обобщенными координатами, отображаем



Фиг. 2.



Фиг. 3.

явления, происходящие в моделях, при помощи 4 независимых переменных  $x, y, z$  и времени  $t$ . Оставляем время непрерывной переменной, остальные же независимые переменные рассматриваются нами только в дискретно расположенных точках модели, в вершинах или узловых точках электрической решетки. Роль зависимой переменной или искомой функции играет величина напряжения  $u$  (а иногда и электрический ток). На основе известных законов, которым точно подчиняются явления в электрических цепях (законы Кирхгофа), найдено, что уравнения, связывающие значения искомой функции ( $u$ ) в узловых точках электрической модели, представляют собой частные виды следующего общего уравнения:

$$\sum_{k=0}^l A_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h^2} \Delta_{x_i}^2 u + \sum_{k=0}^l B_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $A_k$  и  $B_k$  являются заданными функциями независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а в некоторых случаях и функциями искомой переменной  $u$  и времени  $t$ . Через  $\frac{\Delta_{x_i}^2 u}{h^2}$  обозначены вторые центральные раз- деленные разности  $u$  по координатам  $x_i$ ,  $h = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$  — конечные разности по осям координат.

В частном случае трехмерного «пространства»  $n = 3$  и

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{h^2} \Delta_{x_i}^2 u = \bar{\nabla}^2 u,$$

где  $\bar{\nabla}^2$  есть разностное выражение операции Лапласа.

4. На основе найденных соотношений между напряжениями в электрических моделях, которые могут быть установлены нами произвольно в любом частном виде уравнения (1) подбором  $R$ ,  $L$  и  $C$  в элементах  $Z$  и  $Z_0$ , представляется возможным приближенно решать краевые задачи дифференциальных уравнений в частных производных, полагая (для достаточно малых  $h$ )

$$\nabla^2 u \approx \bar{\nabla}^2 u. \quad (2)$$

При этом, как частные случаи, могут приближенно в численном виде решаться краевые задачи уравнения Лапласа ( $\nabla^2 u = 0$ ), Пуассона [ $\nabla^2 u = F(x, y, z)$ ], Фурье ( $\nabla^2 u = a \frac{\partial u}{\partial t}$ ), телеграфное ( $\nabla^2 u = a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu$ ) и другие известные уравнения математической физики при весьма трудных граничных и начальных условиях (неоднородные поля, контур и граничные значения не выражаются аналитически и т. п.).

Замена решения дифференциального уравнения решением разностного в электрических моделях является законной во всяком случае в той мере, в какой эта замена применяется в известном численном разностном методе Рунге (<sup>8-15</sup>). К тому же важно отметить, что в электрических моделях, в отличие от метода Рунге, время изменяется непрерывно, и следовательно, частные производные по времени остаются в уравнениях в неизменном виде.

5. Теория размерностей и теория подобия физических явлений дают возможность искусственно воспроизвести в модели явление, подобное явлению в заданном образце, и широко обобщить результаты решения краевых задач на электрических моделях для целой группы подобных задач из самых различных областей техники и естествознания.

Для этого исследуемое явление в образце, который мы моделируем, рассматривается как объект приложения основных законов физики. На основе этого определяется, если оно не задано, исходное дифференциальное уравнение в частных производных. Уравнение преобразуется в относительных координатах и из него определяются критерии подобия. Затем уравнение приводится в соответствие с каким-либо частным выражением уравнения (1). При этом физические константы исходного уравнения получают соответствующую аналогию в значениях емкости, сопротивления и индуктивности элементов  $Z$  и  $Z_0$  модели.

Условия однозначности создаются подобными в модели и в образце при соблюдении равенства критериев подобия.

К узловым точкам созданной таким образом модели подводятся напряжения, отвечающие начальным и граничным значениям, и измеряются значения напряжения в интересующих точках.

Полученное решение в порядке, обратном изложенному, может быть преобразовано в именованные числа, соответствующие физическим особенностям явления в образце.

6. Принципиально возможно также составлять электрические искусственные модели тел четырех, пяти и вообще  $n$ -мерного измерения, а следовательно, возможно приближенно решать краевые задачи в  $n$ -мерных телах. На фиг. 4 представлена схема модели пятимерного куба. Для ясности на фиг. 4 показано соединение только одной точки.

7. Для измерения напряжений в большом числе точек при малой длительности явлений в электрических моделях исследуемое явление «останавливается во времени» подобно тому, как это получается при исследовании периодических явлений при помощи стробоскопа или шайбы Жубера.

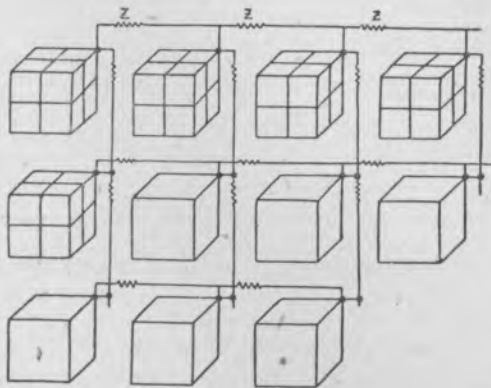
Для этой цели исследуемое явление в модели искусственно делается периодическим, т. е. непрерывно повторяющимся в неизменном виде в течение сколь угодно

долгого времени, достаточного для измерения напряжений в любом числе точек при различных моментах периода явления.

Разработан также способ автоматической записи и непосредственного наблюдения кривых напряжений по ряду точек модели при помощи осциллографа.

В качестве первых пробных опытов при помощи этих моделей получены решения некоторых краевых задач, аналитическое или численное решение которых было известным. Именно, решены: 1) уравнение Лапласа для квадрата (задачи Дирихле, Неймана и смешанная), 2) уравнение Пуассона для квадрата, 3) уравнение Фурье—определение плотности и сдвига фаз тока по сечению цилиндрического проводника (скин-эффект) и др.

Во всех этих задачах измеренные значения в модели отличались от значений, полученных вычислениями, не более чем на  $\pm 2\%$ .



Фиг. 4.

Энергетический институт  
им. Г. М. Кржижановского  
Академия Наук СССР

Поступило  
23 II 1940

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В а р к х а у с е н и В р ү с к, ETZ, 54 (1933). <sup>2</sup> В. С. Лукошников, Известия электропром. сл. тока, № 10 (1929). <sup>3</sup> С. А. Гершгорин, Журн. прикл. физ., VI, вып. 3—4 (1929). <sup>4</sup> В. С. Лукьянов, Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 2 (1939). <sup>5</sup> L. Emanueli, High tension cable plants (Paper № 374); см. также С. И. Брагин, стр. 278 (1937). <sup>6</sup> К. А. Круг (1932). <sup>7</sup> М. В. Кирпичев и М. А. Михеев (1936). <sup>8</sup> С. Runge, ZS. f. Mathem. u. Phys., 56, S. 225 (1908). <sup>9</sup> L. Richardson, Phyl. Trans. of the Royal Soc. of London, ser. A, 210, p. 307 (1911). <sup>10</sup> Л. Канторович и В. Крылов (1936). <sup>11</sup> R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, Mathem. Annalen, 100, S. 32 (1928). <sup>12</sup> Д. Ю. Панов, справочник (1938). <sup>13</sup> L. Col-latz, ZS. f. angew. Mathem. und Mech. (ZAMM), 13, S. 56 (1933). <sup>14</sup> F. Wolf, ZAMM, 6, S. 418 (1926). <sup>15</sup> Г. Маркус, перев. с нем. (1936).