Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

И. И. ПРИВАЛОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА КОШИ-СТИЛЬТЬЕСА

1. Будем называть интегралом типа Коши-Стильтьеса выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^l \frac{e^{i\varphi(s)}\,dF(s)}{x(s)-z}, \tag{1}$$

где L—произвольная замкнутая спрямляемая кривая Жордана длины l, φ—угол между положительными направлениями оси абсцисс и касательной, а $F(s)$—комплексная функция дуги s, заданная на сегменте $[0, l]$ с ограниченным изменением. Пусть x_0—какая-нибудь точка линии L, определенная значением s_0 ее дуги. Обозначим через L_ε часть линии L, оставшуюся после удаления из L маленькой дуги, концами которой служат точки $x(s_0-\varepsilon)$ и $x(s_0+\varepsilon)$.

Особым интегралом назовем конечный предел, если он существует, выражения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}$$

при ε, стремящемся к нулю, полагая в этом случае

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}.$$

Выбирая точку z на некоторой прямой zx_0, наклоненной к нормали под углом ψ_0, $z=x_0\pm\varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, рассмотрим разность

$$F(\varepsilon, x_0, \psi_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}-\int_{L_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}\right];$$

эта разность будет определена во всех точках x_0 линии L, в которых существуют определенные касательные к линии L.

Основная лемма. *Выражение $F(\varepsilon, x_0, \psi_0)$ стремится к пределу $\pm\frac{1}{2}F'(s_0)$, когда $\varepsilon\to 0$ для всех точек x_0 линии L, кроме, быть может, точек множества меры нуль, не зависящего от ψ_0, равномерно относительно ψ_0, $|\psi_0|\leqslant\frac{\pi}{2}\theta$, $\theta<1$.*

Это предложение было мною ранее доказано для случая, когда $F(s)$—абсолютно непрерывная функция на $[0, l]$ ([1]).

2. Пользуясь леммой п. 1, возможно доказать следующую теорему:

Теорема. *Почти всюду на контуре* Г *по всем некасательным путям имеет место формула*:

$$\lim_{z\to x_0} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0} \pm \frac{1}{2}F'(s_0), \tag{I}$$

где интеграл правой части определен, как особый.

В этой формуле Г есть кусочно-гладкий контур с конечным числом точек перегиба.

Формула (I) была установлена мною ранее для случая, когда $F(s)$—абсолютно непрерывная функция на $[0, l]$ ([1]).

3. Естественно назвать выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}$$

интегралом Коши-Стильтьеса, распространенным по произвольной спрямляемой кривой L, если его предельные значения изнутри L по всем некасательным путям совпадают с производной $F'(s)$ почти всюду на контуре L. В силу основной леммы п. 1 интеграл типа Коши-Стильтьеса обращается в интеграл Коши-Стильтьеса тогда и только в том случае, когда предельные его значения извне почти всюду равны нулю или, что то же, когда интеграл типа Коши-Стильтьеса вне L тождественно равен нулю (по теореме единственности). Отсюда условия

$$\int\limits_{L} e^{i\varphi} x^n\,dF(s) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл типа Коши-Стильтьеса обращался в интеграл Коши-Стильтьеса.

Здесь возникают две проблемы:

a) Взаимное отношение класса функций, представимых интегралом Коши-Стильтьеса с классом функций, представимых интегралом Коши-Лебега.

Мною доказано, что классы совпадают, т. е. *если* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z} = 0$ *вне* L, *то всюду*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F'(s)\,dx}{x-z}.$$

b) Единственность представления функции интегралом Коши-Стильтьеса, т. е. если одна и та же функция представима двумя интегралами Коши-Стильтьеса, то будут ли их функции распределения отличаться лишь постоянным слагаемым?

Эта задача разрешена мною также в положительном смысле.

4. Далее доказывается теорема:

Теорема. *Если выражение* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(s)\,dx}{x-z}$, *в котором функция* $F(s)$ *с ограниченным изменением на некоторой дуге* $[\alpha,\beta]$ *контура* L, *есть интеграл Коши, то необходимо* $F(s)$ *должна быть абсолютно непре-*

рывной на всякой дуге $[\alpha_1, \beta_1]$, *принадлежащей* (α, β); *кроме того в этом случае функция, представленная интегралом Коши, обязательно будет непрерывной вплоть до дуги* (α, β).

Последняя теорема доказана Риссом для случая, когда L есть окружность, а функция $F(s)$ с ограниченным изменением на L.

5. В заключение отметим важное для приложений интегралов типа Коши предложение: если $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(s)\,dx}{x-z}=0$ вне спрямляемого контура L, где $\mu(s)$—вещественная непрерывная функция, заданная на L, то $\mu(s)\equiv\text{const}$; если же $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(s)\,dx}{x-z}=0$ внутри L, то $\mu(s)\equiv 0$.

Поступило
31 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] **И. И. Привалов,** Ученые записки Саратовского ун-та (1918).