

УДК 534.535

***В. Н. Белый\****

доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Беларуси

***Н. А. Хило\****

кандидат физико-математических наук, доцент

***О. В. Шакин\*\****

доктор технических наук, профессор

***П. А. Хило\*\*\****

доктор физико-математических наук, профессор

\*Институт физики НАН Беларуси

\*\*Санкт-Петербургский государственный университет

аэрокосмического приборостроения

\*\*\*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

### БЕССЕЛЕВЫ АКУСТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ В ПОПЕРЕЧНО АНИЗОТРОПНЫХ ТЕТРАГОНАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Исследовано влияние поперечной анизотропии на фазовую скорость и состояние поляризации плоских акустических волн в кристаллах класса 4/m. Для последующего анализа влияния анизотропии на бесселевы акустические пучки (БАП) используется модель БАП как когерентной суперпозиции плоских волн с волновыми векторами, лежащими на конической поверхности. Это позволяет исследовать ряд свойств БАП, используя относительно простые решения уравнений Кристоффеля для плоских волн. Показано, что деструктивное влияние анизотропии всегда возрастает с увеличением угла конуса и наиболее сильно сказывается на БАП, сформированных из квазипоперечных плоских волн. В то же время влияние анизотропии на БАП, сформированных из плоских волн с квазипродольной поляризацией, значительно слабее.

**Ключевые слова:** бесселевы акустические пучки, уравнения Кристоффеля, анизотропный кристалл.

***V. N. Belyi\****

Dr. Sc., Phys.-Math., Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Belarus

***N. A. Khilo\****

PhD, Phys.-Math., Associate Professor

***O. V. Shakin\*\****

Dr. Sc., Tech., Professor

***P. A. Khilo\*\*\****

Dr. Sc., Phys.-Math., Professor

\*Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

\*\*St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

\*\*\*Sukhoi State Technical University of Gmel

### BESSEL ACOUSTIC BEAMS IN TRANSVERSELY ANISOTROPIC TETRAGONAL CRYSTALS

The influence is investigated of transverse anisotropy on phase velocity and polarization state of plane acoustic waves in 4/m class crystals. For further analysis of the influence of anisotropy on Bes-

sel acoustic beams (BAB) the model of BAB is used as a coherent superposition of plane waves with wave vectors lying on the conical surface. This allows studying a number of BAB features using relatively simple solutions of the Christoffel equations for plane waves. It is shown that destructive influence of anisotropy always increases with the growth in cone angle and most strongly affects BAB formed from quasi-transverse plane waves. At the same time the influence of anisotropy on BAB formed from plane waves with quasi-longitudinal polarization is much weaker.

**Keywords:** Bessel acoustic beams, Christoffel equations, anisotropic crystal.

Актуальной задачей современной акустооптики (АО) является исследование закономерностей распространения и взаимодействия ультразвуковых и световых волн в анизотропных кристаллах. Эта задача относительно просто решается применительно к плоским акустическим и световым волнам, но усложняется при переходе к акустическим пучкам, в особенности к бесселевым (БАП).

В данной работе проводится исследование данной проблемы для случая, когда БАП распространяется в кристалле тетрагональной симметрии вдоль оси 4-го порядка. Несмотря на распространение вдоль оси симметрии кристалла, в нем проявляется акустическая анизотропия, в том числе в поперечной плоскости. Поперечная анизотропия приводит к зависимости фазовой скорости парциальных плоских волн от азимутальной координаты, что является причиной искажений БАП в сравнении с распространением в поперечно изотропных средах [1; 2].

Распространение парциальной плоской волны в декартовой системе координат описывается следующей системой алгебраических уравнений Кристоффеля:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} - \rho V^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} - \rho V^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} - \rho V^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\Gamma_{il} = c_{ijkl}n_jn_k$  – компоненты тензора Кристоффеля,  $n_i$  – компоненты единичного вектора в направлении волновой нормали,  $c_{ijkl}$  – компоненты тензора упругости,  $u_k$  – компоненты вектора упругого смещения. В цилиндрических координатах нормаль к волновому фронту волны имеет компоненты:  $n_1 = \sin \gamma \cos \varphi$ ,  $n_2 = \sin \gamma \sin \varphi$ ;  $n_3 = \cos \gamma$ .

Условие равенства нулю определителя системы (1) приводит к кубическому уравнению относительно переменной  $x = \rho V^2$ , три корня которого были рассчитаны по известным формулам Кордано. Это позволило получить картину распределения фазовых скоростей трех мод в плоскости ( $\gamma$ ,  $\varphi$ ) в кристалле (рис. 1).

Как видно из рис. 1, имеется периодическая модуляция фазовой скорости, что является следствием поперечной анизотропии кристалла. Зависимость глубины модуляции от угла конуса для мод 1 и 2 показана на рис. 2. Анизотропия мод 3 и 2 почти совпадают.

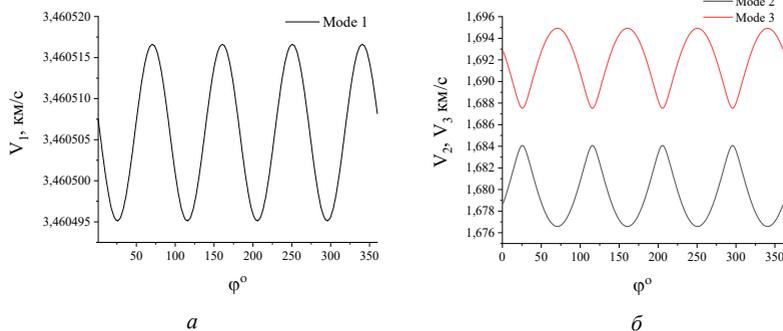


Рис. 1. Скорость распространения трех акустических мод в кристалле  $\text{NaBi}(\text{MoO}_4)_2$  в зависимости от азимутального угла  $\varphi$ . Угол конуса равен  $5^\circ$

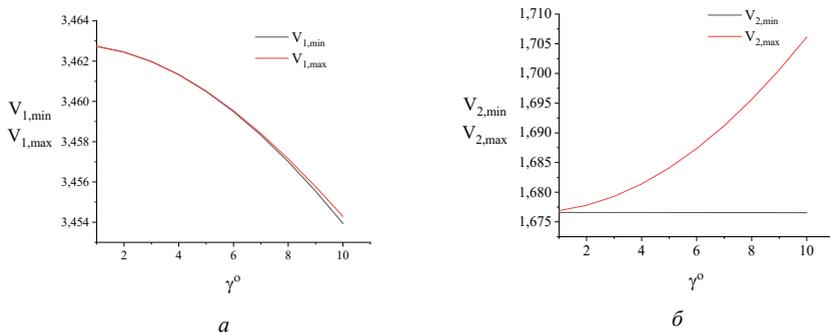


Рис. 2. Зависимость минимальной и максимальной скоростей мод 1 (а) и 2 (б) от угла  $\gamma$

Зависимость фазовой скорости от азимутального угла вызывает фазовое рассогласование парциальных плоских волн в БАП и определяет длину неразрушающего распространения  $L$  пучка. Эта длина рассчитывалась из формулы  $(\Omega/V_{\min} - \Omega/V_{\max})L = \pi/6$ , где  $\Omega$  – угловая частота и представлена в таблице.

**Зависимость длины неразрушающего распространения трех бesselевых акустических мод в кристалле  $\text{NaBi}(\text{MoO}_4)_2$ . Угловая частота  $\Omega$  равна 100 МГц**

$\gamma$ , град	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L_1, m$	1847	115,2	22,7	7,2	2,9	1,4	0,75	0,44	0,27	0,18
$L_2, cm$	4,89	1,22	0,54	0,31	0,20	0,14	0,10	0,08	0,06	0,05
$L_3, cm$	4,89	1,23	0,55	0,31	0,20	0,14	0,11	0,08	0,07	0,06

Для исследования состояния поляризации парциальных плоских волн из системы уравнений (1) были найдены отношения поперечных и продольной компонент вектора упругого смещения  $u_{j,x}/u_{j,z}$  и  $u_{j,y}/u_{j,z}$  в декартовых и цилиндрических координатах:

$$u_{j,\rho} = u_{j,x} \cos(\varphi) + u_{j,y} \sin(\varphi); \quad u_{j,\varphi} = -u_{j,x} \sin(\varphi) + u_{j,y} \cos(\varphi). \quad (2)$$

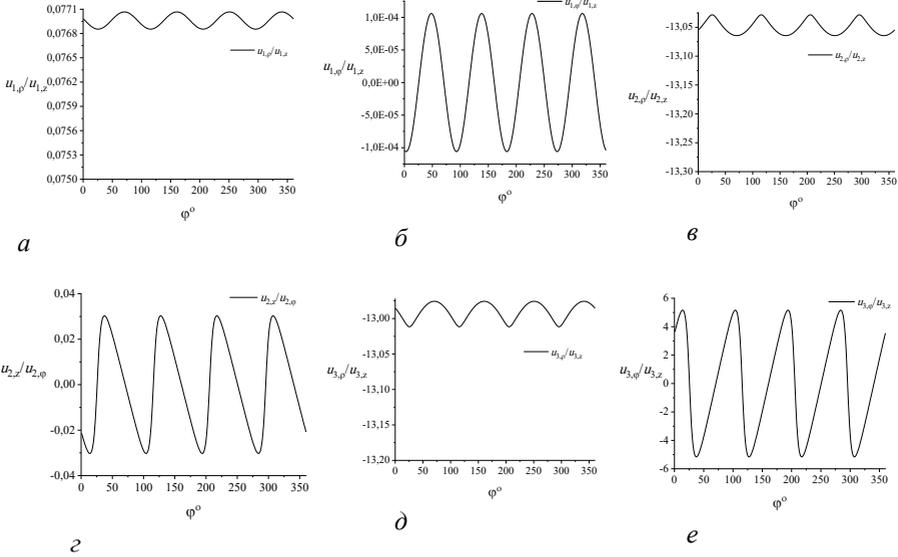


Рис. 3. Зависимости отношения радиальной и азимутальной компонент трех акустических мод к продольной компоненте от азимутального угла. Угол конуса равен  $5^\circ$

На рис. 3 показаны азимутальные зависимости отношения компонент  $u_{j,\rho}/u_{j,z}$  и  $u_{j,\varphi}/u_{j,z}$  трех акустических мод. Эти зависимости содержат существенную информацию о пространственной структуре соответствующих бesselовых пучков. Для ее нахождения используем аппроксимацию кривых на рис. 3 следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{u_{1,\rho}}{u_{1,z}} &\approx \mu_{1,\rho z}; & \frac{u_{1,\varphi}}{u_{1,z}} &\approx \mu_{1,\varphi z} \sin(4\varphi - \Delta\varphi_1); & \frac{u_{2,\rho}}{u_{2,z}} &\approx -\mu_{2,\rho z}; \\ \frac{u_{2,z}}{u_{2,\varphi}} &\approx \mu_{2,\varphi z} \sin(4\varphi - \Delta\varphi_2); & \frac{u_{3,\rho}}{u_{3,z}} &\approx -\mu_{3,\rho z}, & \frac{u_{3,\varphi}}{u_{3,z}} &\approx -\mu_{3,\varphi z} \sin(4\varphi - \Delta\varphi_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Приближенность этих формул состоит в пренебрежении малыми осцилляциями для кривых на рис. 3, а, г, в, з, д, а также в замене осцилляций на рис

3,  $z$  и 3,  $e$  на синусоидальные. Последнее означает учет в Фурье-спектре этих функций только первой гармоники, осциллирующей с периодом  $90^\circ$ .

В указанном приближении уравнениям (3) удовлетворяет следующий набор амплитуд, оптимальный для последующего конструирования бесселевых пучков:

$$\begin{aligned} u_{1,z} &= e^{im\varphi}; u_{1,\rho} = \mu_{1,\rho z} e^{im\varphi}; u_{1,\varphi} = \mu_{1,\varphi z} e^{im\varphi} \sin(4\varphi - \Delta\varphi_1); \\ u_{2,z} &= \mu_{2,\varphi z} e^{im\varphi} \sin(4\varphi - \Delta\varphi_1); u_{2,\rho} = -\mu_{2,\rho z} \mu_{2,\varphi z} e^{im\varphi} \sin(4\varphi - \Delta\varphi_1); u_{2,\varphi} = e^{im\varphi}; \\ u_{3,z} &= e^{im\varphi}; u_{3,\rho} = -\mu_{3,\rho z} e^{im\varphi}; u_{3,\varphi} = -\mu_{3,\varphi z} \sin(4\varphi - \Delta\varphi_2) e^{im\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Явный вид амплитуд  $a_{j,p}$  векторных БАП ( $j=1, 2, 3$ ;  $p=\rho, \varphi, z$ ) находится далее расчетом табличных интегралов вида:

$$a_{j,p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iqr \cos(\varphi_1 - \varphi)} u_{j,p}(\varphi_1) d\varphi_1. \quad (5)$$

Таким образом, в работе представлен метод расчета векторных акустических бесселевых пучков для поперечно анизотропных кристаллов класса 4/m.

### Библиографический список

1. Belyi V. N., Khilo P. A., Kazak N. S., Khilo N. A. Features of the acousto-optic interaction of Bessel light beams and Bessel acoustic beams in transversely isotropic crystals // J. Opt. Technol. 2015. Vol. 84, № 2. P. 130–136.
2. Hanorvar F., Sinclair A. N. Acoustic wave scattering from transversely isotropic cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. Vol. 100, № 1. P. 57–63.