Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 28 IV 1947)

Задача Стефана о распространении тепла при отсутствии конвекции, сопровождающемся выделением скрытой теплоты фазового перехода, в одномерном случае может быть сформулирована следующим образом: если $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$—температуры твердой и жидкой фаз, соответственно, и $x=y(t)$ — граница раздела фаз, то

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial t} \quad \text{при} \quad 0<x<y(t); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial t} \quad \text{при} \quad y(t)<x<l;$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(0, t)=f_1(t)\leqslant 0 \quad \text{при} \quad t>0;\\ &u_1[y(t), t]=u_2[y(t), t]=0 \quad \text{при} \quad t\geqslant 0;\\ &u_2(l, t)=f_2(t)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad t>0; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$u_i(x, 0)=\varphi_i(x); \quad \varphi_i[y, 0]=0 \qquad (i=1, 2). \tag{3}$$

Если $l=\infty$, последнее из условий (2) отпадает.

Положение границы раздела фаз $y(t)$ определяется из условия Стефана

$$\frac{dy}{dt}=k_1\frac{\partial}{\partial x}u_1(x, t)\Big|_{x=y(t)-0}-k_2\frac{\partial}{\partial x}u_2(x, t)\Big|_{x=y(t)+0}. \tag{4}$$

В нашей работе [1] впервые были доказаны существование и единственность решения задачи (1)—(4) в предположении $y(0)\neq 0$, $y(0)\neq l$. Задача сводилась к системе интегральных уравнений для градиента температур твердой и жидкой фаз с помощью нелинейного преобразования координат, переводящего область существования каждой фазы в отрезок [0,1]. При таком методе решения задачи определение положения границы раздела фаз $x=y(t)$ не могло быть выполнено, минуя определение $\partial u_i/\partial x$ внутри областей, соответственно, $0<x<y(t)$ и $y(t)<x<l$. Построенные в [1] интегральные уравнения были смешанного типа: фредгольмовские по переменной x, Вольтерра — по времени t. Мы предлагаем в настоящей работе новый метод решения задачи (1)—(4), позволяющий определять положение границы раздела фаз $x=y(t)$, минуя определение градиента температур внутри каждой из фаз. При этом мы сохраняем предположение о сосуществовании твердой и жидкой фаз в начальный момент: $y(0)=l$, $y(0)\neq 0$.

1. Положим $g_i(x, \xi, t, \tau)$ и $G_i(x, \xi, t, \tau)$ равными функции Грина для первой и второй краевой задач уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a_i^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

для полупрямой $0\leqslant x$ при $i=1$ и полупрямой $x\leqslant l$ при $i=2$.

В силу краевых условий (2), (3) мы должны иметь:

$$u_1(x,t)=a_1^2\int_0^t f_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}g_1(x,0,t,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^{y(0)}\varphi_1(\xi)\,g_1(x,\xi,t,0)\,d\xi+a_1^2\int_0^t v_1(\tau)\,g_1(x,y(\tau),t,\tau)d\tau;$$

$$u_2(x,t)=-a_2^2\int_0^t f_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}g_2(x,l,l,\tau)\,d\tau+ \tag{5}$$

$$+\int_{y(0)}^{l}\varphi_2(\xi)\,g_2(x,\xi,t,0)\,d\xi-a_2^2\int_0^t v_2(\tau)\,g_2(x,y(\tau),t,\tau)\,d\tau,$$

где положено

$$v_1(t)=\frac{\partial}{\partial x}u_1(x,t)\Big|_{x=y(t)-0},\quad v_2(t)=\frac{\partial}{\partial x}u_2(x,t)\Big|_{x=y(t)+0}. \tag{5*}$$

Пользуясь известными свойствами теплового потенциала двойного слоя, найдем:

$$v_1(t)=\sum_{i=1}^{4}I_i(t\,|\,v_1,y)=2\,[\varphi_1(0)-f_1(0)]\,G_1(y(t),0,t,0)-$$

$$-2\int_0^t\dot{f}_1(\tau)\,G_1(y(t),0,t,\tau)\,d\tau+2\int_0^{y(0)}\dot{\varphi}_1(\xi)\,G_1(y,(t),\xi,t,0)\,d\xi+$$

$$+2a_1^2\int_0^t v_1(\tau)\frac{\partial}{\partial x}g_1(y(t),y(\tau),t,\tau)\,d\tau; \tag{6^1}$$

$$v_2(t)=\sum_{i=1}^{4}I_i'(t\,|\,v_2,y)=2\,[f_2(0)-\varphi_2(l)]\,G_2(y(t),l,t,0)+$$

$$+2\int_0^t\dot{f}_2(\tau)\,G_2(y(t),l,t,\tau)\,d\tau+2\int_{y(0)}^{l}\dot{\varphi}_2(\xi)\,G_2(y(t),\xi,t,0)\,d\xi-$$

$$-2a_2^2\int_0^t v_2(\tau)\frac{\partial}{\partial x}(g_2y(t),y(\tau),t,\tau)\,d\tau. \tag{6^2}$$

Присоединяя сюда условие (4) в интегральной форме:

$$y(t)=y(0)+\int_0^t[k_1v_1(\tau)-k_2v_2(\tau)]\,d\tau, \tag{6^3}$$

получим подлежащую решению систему интегральных уравнений.

2. Система (6^1), (6^2) (6^3) решается с помощью последовательных приближений

$$v_{1n}(t) = \sum_{i=1}^{4} I_{in} = \sum_{i=1}^{4} I_i(t \mid v_{1n-1}, y_{n-1}); \tag{7¹}$$

$$v_{2n}(t) = \sum_{i=1}^{4} I'_{in} = \sum_{i=1}^{4} I'_i(t \mid v_{2n-1}, y_{n-1}); \tag{7²}$$

$$y_n(t) = y(0) + \int_0^t [k_1 v_{1n}(\tau) - k_2 v_{2n}(\tau)]\, d\tau, \tag{7³}$$

где I_i, I'_i определены согласно ($6^{1,2}$). За нулевое приближение принимаются произвольные функции v_{i0}, y_0 такие, что

$$|v_{i0}(t)| \leqslant K, \quad \left|\frac{dy_0}{dt}\right| \leqslant (k_1 + k_2) K = K_0 \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T_0.$$

В этом предположении без труда доказывается равномерная ограниченность семейств функций $\{v_{in}(t)\}$, $\{dy_n/dt\}$ при достаточно малом $t \leqslant T_1 \leqslant T_0$. Это следует из оценок:

$$|I_{1n}|; \quad |I'_{1n}| \leqslant \frac{L_0}{y(0) \mp Kt}; \quad |I_{2n}|; \quad |I'_{2n}| \leqslant \frac{L_1 t}{y(0) \mp Kt},$$

$$|I_{3n}|; \quad |I'_{3n}| \leqslant L_2(1 + \sqrt{t}); \quad |I_{4n}|; \quad |I'_{4n}| \leqslant L_3\left(\frac{1}{y(0) \mp Kt} + 1\right)\sqrt{t},$$

где L_i ($i = 0, 1, 2, 3$) не зависят от K и t.

3. Равномерная ограниченность $\{v_{in}(t)\}$, $\{dy_n/dt\}$ позволяет провести индукцию, доказывающую справедливость неравенств:

$$|v_{in+1}(t) - v_{in}(t)| < L\bar{K}^{n/2} t^{n/2}; \quad n = 1, 2, \ldots; \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

если $0 \leqslant t \leqslant T' \leqslant T$ достаточно мало и $\bar{K} > 0$ достаточно велико. Отсюда следует сходимость последовательных приближений (7^i), ибо ряды $v_{i0} + \sum_{n=1}^{\infty} [v_{in}(t) - v_{in-1}(t)]$, $i = 1, 2$, мажорируются рядом $L \sum_{n=0}^{\infty} \bar{K}^{n/2} t^{n/2}$, равномерно сходящимся при $t \leqslant T'' < 1/\bar{K}$.

4. Пусть $v_1(t)$, $v_2(t)$, $y(t)$ и $v'_1(t)$, $v'_2(t)$, $y'(t)$ суть две системы решений. Подвергнем их интегрированию согласно (7^i) ($i = 1, 2, 3$). Будем иметь:

$$v_{in} = v_i, \quad v'_{in} = v'_i, \quad i = 1, 2; \qquad y_n = y, \quad y'_n = y'. \tag{9}$$

Индукция, проводимая как выше, дает

$$|v_{in}(t) - v'_{in}(t)| < L\bar{K}^{n/2} t^{n/2}; \quad |y_n(t) - y'_n(t)| < \frac{2L_0 \bar{K}^{n/2} t^{(n+2)/2}}{n+2}.$$

Внося сюда (9), принимая $t \leqslant T < 1/\bar{K}$ и выбирая достаточно большое $N = N(\varepsilon)$, найдем $|v_i(t) - v'_i(t)| < \varepsilon$, $|y(t) - y'(t)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, что и доказывает единственность решения задачи. Подчеркиваем, что как доказательство сходимости итераций, так и доказательство единственности получены нами, как и в цитированной выше работе, в предположении $y(0) \neq 0$, $y(0) \neq l$.

5. После того как построены функции $v_i(t)$, $y(t)$, определение распределения температуры внутри твердой и жидкой фаз сводится к вычислению интегралов (5). Легко видеть, что функции $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, определенные из (5), действительно удовлетворяют второму из условий (2): $u_1[y(t), t] = u_2[y(t), t] = 0$. Действительно, если

$$u_i[y(t), t] = w_i(t) \neq 0 \quad (i = 1, 2),$$

то $u_i(x, t)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$u_1(x, t) = a_1^2 \int_0^t f_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_1(x, 0, t, \tau)\, d\tau + \int_0^{y(0)} \varphi_1(\xi) g_1(x, \xi, t, 0)\, d\xi +$$

$$+ a_1^2 \int_0^t v_1(\tau) g_1(x, y(\tau), t, \tau)\, d\tau + \int_0^t w_1(\tau)[g_1(x), y(\tau), t, \tau) \frac{dy}{d\tau} -$$

$$- a_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi} g_1(x, y(\tau), t, \tau)]\, d\tau.$$

$$u_2(x, t) = - a_2^2 \int_0^t f_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(x, l, t, \tau)\, d\tau + \int_{y(0)}^{l} \varphi_2(\xi) g_2(x, \xi, t, 0)\, d\xi -$$

$$- a_2^2 \int_0^t v_2(\tau) g_2(x, y(\tau), t, \tau)\, d\tau - \int_0^t w_2(\tau)[g_2(x, y(\tau), t, \tau) \frac{dy}{d\tau} -$$

$$- a_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(x, y, (\tau), t, \tau)]\, d\tau.$$

Сопоставляя с (5), приходим к равенствам:

$$\int_0^t w_1(\tau) \left[g_1(x, y(\tau), t, \tau) \frac{dy}{d\tau} - a_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi} g_1(x, y(\tau), t, \tau) \right] d\tau = 0;$$

$$\int_0^t w_2(\tau) \left[g_2(x, y(\tau), t, \tau) \frac{dy}{d\tau} - a_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(x, y(\tau), t, \tau) \right] d\tau = 0.$$

Переходя к пределу при $x \to y(t)$ слева в первом из этих равенств и справа во втором, получим уравнения:

$$w_1(t) = 2 \int_0^t w_1(\tau) \left[a_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi} g_1(y(t), y(\tau), t, \tau) - \frac{dy}{d\tau} g_1(y(t), y(\tau), t, \tau) \right] d\tau;$$

$$w_2(t) = -2 \int_0 w_2(\tau) \left[a_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(y(t), y(\tau), t, \tau) - \frac{dy}{d\tau} g_2(y(t), y(\tau), t, \tau) \right] d\tau.$$

Единственность решения этих интегральных уравнений известна. Таким образом, мы приходим к заключению

$$w_1(t) = w_2(t) = 0,$$

что и завершает доказательство.

Поступило
28 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Рубинштейн, Изв. АН СССР, сер. геофиз. и географ., № 1 (1947).
[2] J. Stephan, Sitzungsber. Kais. Akad. d. Wiss. Wien, Math.-naturw. Geb., 98, II a, Juli (1889).