Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Е. В. МАХОВЕР

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 IV 1947)

Мы рассматриваем два вида пластической деформации: деформацию кручения и плоскую деформацию, причем указываются необходимые и достаточные условия, которым должны быть подчинены постоянные коэффициенты среды, чтобы данная деформация при любом контуре сечения была осуществима. Условие текучести для анизотропных сред принято согласно гипотезе Mises'а [1], и, таким образом, полная система уравнений, определяющая напряженное пластическое состояние, следующая:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0; \tag{I}$$

уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0; \tag{II}$$

условие пластичности:

$$\begin{aligned} F = &-{}^1/_2\left[k_{12}(\sigma_x-\sigma_y)^2+k_{23}(\sigma_y-\sigma_z)^2+k_{13}(\sigma_z-\sigma_x)^2\right]- \\ &-\tau_{yz}\left[k_{24}(\sigma_x+\sigma_y)+k_{34}(\sigma_x-\sigma_z)\right]-\tau_{xz}\left[k_{35}(\sigma_y-\sigma_z)+k_{15}(\sigma_y-\sigma_x)\right]- \\ &-\tau_{xy}\left[k_{16}(\sigma_z-\sigma_x)+k_{26}(\sigma_z-\sigma_y)\right]+k_{45}\tau_{yz}\tau_{xz}+k_{56}\tau_{xy}\tau_{yz}+k_{46}\tau_{xy}\tau_{yz}+ \\ &+{}^1/_2\left[k_{44}\tau_{yz}^2+k_{55}\tau_{xz}^2+k_{66}\tau_{xy}^2\right]=k^2 \end{aligned} \tag{III}$$

и условия линейной зависимости между напряжениями и скоростями деформации:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x}=c\frac{dF}{\partial\sigma_x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}=c\frac{\partial F}{\partial\tau_{yz}}, \\ &\frac{\partial v_y}{\partial y}=c\frac{\partial F}{\partial\sigma_y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}=c\frac{\partial F}{\partial\tau_{xz}}, \\ &\frac{\partial v_z}{\partial z}=c\frac{\partial F}{\partial\sigma_z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}=c\frac{\partial F}{\partial\tau_{xy}}. \end{aligned} \tag{IV}$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$ — компоненты напряжений; v_x, v_y, v_z — компоненты скоростей деформации; k_{ij} — постоянные анизотропии;

c — коэффициент пропорциональности, который является неизвестной функцией координат.

§ 1. Пластическое кручение анизотропной среды. Постановка задачи. Анизотропное тело любого контура сечения скручивается некоторым моментом. Ось z направлена вдоль оси тела перпендикулярно к плоскости момента. Угол закручивания на единицу длины равен ϑ. Предполагается чистое кручение:

$$v_x = -\vartheta yz, \quad v_y = \vartheta xz, \quad v_z = \varphi(x, y). \tag{1}$$

В силу сделанных нами допущений система уравнений (I)—(IV) значительно упрощается и сводится к системе двух уравнений

$$A\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + 2B\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 = k^2, \tag{2}$$

$$d\Phi_{y^3} + (b-c)\Phi_{xy^2} + (a-d)\Phi_{x^2y} - c\,\Phi_{x^3} = 0, \tag{3}$$

где постоянные A, B, C, a, b, c, d определенным образом выражаются через k_{ij}, а функция $\Phi(x, y)$ связана с напряжениями следующими соотношениями:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Обычным способом доказывается, что на контуре сечения $\Phi(x, y) = 0$ Уравнение (2) некоторым аффинным преобразованием координат легко приводится к уравнению

$$\Phi^2_{x'} + \Phi^2_{y'} = k^2, \tag{4}$$

и на преобразованном контуре $\Phi = 0$. Интегралом уравнения, очевидно, является поверхность постоянного ската, построенная на преобразованном контуре.

Условие на контуре полностью определяет интеграл уравнения (2). Для того чтобы этот интеграл удовлетворял также и уравнению (3) при любой форме сечения, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты были равны нулю. Таким образом, пластическая деформация кручения возможна только в среде, постоянные пластичности которой подчинены уравнениям:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0. \tag{5}$$

В частности, полученные условия тождественно выполняются в кристаллах с регулярной анизотропией. Для деформации чистого кручения кристаллов гексагональной системы необходимо и достаточно, чтобы

$$k_{23}^2(2k_{12} - k_{23}) = 0. \tag{6}$$

В телах с моноклинной анизотропией постоянные k_{ij} должны быть связаны соотношениями:

$$k_{23}k_{26}(k_{13} + k_{23}) + k_{23}(k_{16} + k_{26})^2 = 0, \qquad k_{13}k_{23}(k_{16} + k_{26}) = 0. \tag{7}$$

§ 2. Плоская пластическая деформация. При плоской деформации

$$v_z = 0, \quad v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \tag{8}$$

и все компоненты напряжений не зависят от z. Анализируя уравнения (I) — (IV) при дополнительных соотношениях (8), мы приходим к тому, что плоская деформация при произвольной форме области и произвольных граничных условиях возможна только тогда, когда коэффициенты удовлетворяют некоторым вполне определенным соотношениям, которые мы не выписываем из-за их громоздкости. Эти соотношения тождественно выполняются для систем регулярной, гексагональной и моноклинной.

Остановимся на плоской пластической деформации моноклинной среды. В такой среде

$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0, \quad \sigma_z=a_1\sigma_x+a_2\sigma_y+a_3\sigma_z, \tag{9}$$

где коэффициенты a_i — некоторые выражения, составленные из постоянных k_{ij}. Условие (III) в этом случае можно представить в виде:

$$[\sigma_x-\sigma_y+2\varkappa\tau_{xy}]^2+4\lambda^2\tau_{xy}^2=4k^2, \tag{10}$$

где $\varkappa$ и λ — некоторые постоянные.

Таким образом, σ_x, σ_y, τ_{xy} определяются уравнением (10) и уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0. \tag{11}$$

Введем новые функции σ и θ, полагая

$$\sigma_x+\varkappa\tau_{xy}=\sigma+k\sin 2\theta, \quad \sigma_y-\varkappa\tau_{xy}=\sigma-k\sin 2\theta, \quad \tau_{xy}=-\frac{k}{\lambda}\cos 2\theta. \tag{12}$$

Уравнение (10) удовлетворяется тождественно.

Уравнения (11) переходят в следующие:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma}{\partial x}+2k\left(\cos 2\theta-\frac{\varkappa}{\lambda}\sin 2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{2k}{\lambda}\sin 2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial y}-2k\left(\cos 2\theta-\frac{\varkappa}{\lambda}\sin 2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{2k}{\lambda}\sin 2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y}=0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения (13) имеют два семейства действительных ортогональных характеристик, уравнения которых суть

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sin 2\theta}{(\lambda\cos 2\theta-\varkappa\sin 2\theta)+\sqrt{(\lambda\cos 2\theta-\varkappa\sin 2\theta)^2+\sin^2 2\theta}}, \tag{14}$$

$$\frac{\sigma}{2k}+\omega(\theta)=\xi=\text{const},$$

и

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin 2\theta}{(\lambda\cos 2\theta-\varkappa\sin 2\theta)-\sqrt{(\lambda\cos 2\theta-\varkappa\sin 2\theta)^2+\sin^2 2\theta}}, \tag{15}$$

$$\frac{\sigma}{2k}-\omega(\theta)=\eta=\text{const},$$

где

$$\omega(\theta)=\int_0^\theta\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\lambda\cos 2\theta-\varkappa\sin 2\theta)^2+\sin^2 2\theta}\,d\theta.$$

Если принять за новые переменные ξ и η, то уравнения (13) преобразуются к канонической форме

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\operatorname{tg}\varphi\,\frac{\partial\xi}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x}\operatorname{tg}\varphi-\frac{\partial\eta}{\partial y}=0. \tag{16}$$

Здесь φ — угол наклона характеристик (14) к оси OX. Применяя преобразование М. Леви ([2]), мы получим линейную систему

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial x}{\partial \xi}. \tag{17}$$

Ее можно свести к системе с ограниченными коэффициентами, введя в качестве новых неизвестных составляющие u и v радиуса-вектора в рассматриваемой точке по направлениям касательной и нормали к характеристике (14), проходящей через данную точку. Эта система имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{d\omega} u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{d\omega} v = 0. \tag{18}$$

Теория интегрирования этих уравнений, аналогична теории интегрирования уравнений изотропных пластических сред.

Преобразование М. Леви выполнимо, если $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$. Равенство $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 0$ возможно только в следующих случаях: a) $\xi = \text{const}$, $\eta \neq \text{const}$; b) $\xi \neq \text{const}$, $\eta = \text{const}$, c) $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$. Каждому из этих случаев отвечает особый тип интегралов уравнений пластичности.

В случае a) этот интеграл имеет вид:

$$\frac{\sigma}{2k} + \omega(\theta) = \text{const}, \tag{19}$$

$$y = -\frac{(\lambda \cos 3\theta - \varkappa \sin 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}{\sin 2\theta} x + \psi_1(\theta).$$

В случае b)

$$\frac{\sigma}{2k} - \omega(\theta) = \text{const},$$

$$y = \frac{\sin 2\theta}{(\lambda \cos 2\theta - \varkappa \sin 2\theta) + \sqrt{(\lambda \cos 2\theta - \varkappa \sin 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}} + \psi_2(\theta). \tag{20}$$

В случае c) σ и θ суть постоянные, что соответствует равномерному напряженному состоянию.

В случае a) или b), как это видно, например, из уравнений (14) и (20), характеристики одного из семейств суть прямые. В случае c) прямолинейны характеристики обоих семейств.

Выражаю глубокую благодарность профессору С. Г. Михлину за консультацию и руководство работой.

Поступило
14 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. v. Mises, ZAMM, 8, H. 3 (1928). [2] С. Г. Михлин, Математическая теория пластичности (в книге С. А. Христианович, С. Г. Михлин, Б. Б. Девисон, Некоторые новые вопросы механики сплошной среды), изд. АН СССР, 1938.