Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. ГАЛИН

ДАВЛЕНИЕ ШТАМПА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 17 IV 1947)

Рассмотрим задачу о давлении на упругое полупространство ($z \leqslant 0$) штампа, который в плане имеет форму бесконечного клина и обладает плоским основанием (рис. 1). Угол между прямыми, ограничивающими бесконечный клин, равен 2α. Предполагается, что между штампом и основанием силы трения отсутствуют. Штамп перемещается на некоторую величину, оставаясь параллельным плоскости xy.

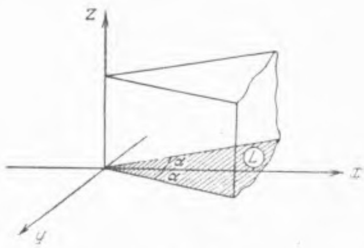

Рис. 1

Если на полупространство давит штамп с плоским основанием, имеющим полигональную форму в плане, то распределение давлений в окрестности вершины угла может быть определено на основании решения указанной выше задачи (значительный интерес представляет, в частности, вопрос о давлении фундамента с основанием в виде прямоугольника). Известно [1], что решение задачи приводит к отысканию гармонической функции $\varphi(x, y, z)$, совпадающей при $z=0$ с величиной перемещения поверхности упругого полупространства, так что $\varphi(x, y, 0)=u_z(x, y, 0)$, и удовлетворяющей следующим граничным условиям:

$$\text{на } L \quad \varphi=c; \qquad \text{вне } L \quad \partial\varphi/\partial z=0. \tag{1}$$

Здесь L — часть плоскости $z=0$, находящаяся внутри клина, c — величина перемещения штампа.

Давление, возникающее под штампом, определяется следующим образом

$$p(x, y)=-(\sigma_z)_{z=0}=\frac{-E}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0},$$

E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Из (1) следует, что $\varphi(x, y, z)$ может быть представлена в виде потенциала простого слоя, распределенного на плоском клине L. Ее определение можно привести к следующему случаю задачи Дирихле: найти гармоническую функцию, непрерывную во всем пространстве, кроме разреза L, имеющего форму плоского клина; на верхней и нижней сторонах разреза она должна принимать значения, равные постоянной величине. На бесконечности должны обращаться в нуль первые производные от функции φ (что соответствует обращению в нуль напряжений).

Введем сферические координаты r, θ и ϑ по формулам:

$$z=r\sin\theta\sin\vartheta, \quad y=r\sin\theta\cos\vartheta, \quad x=r\cos\theta. \tag{3}$$

Тогда уравнение Лапласа будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}=0. \tag{4}$$

Будем полагать, что $\varphi(x, y, z)$ не зависит от радиуса так же, как и ее граничные значения на плоском клине L. Тогда $\varphi(x, y, z)$ будет сферической гармонической функцией нулевой степени.

Если положить

$$\varphi(x, y, z)=\Phi(\theta, \vartheta), \tag{5}$$

то функция $\Phi(\theta, \vartheta)$ будет удовлетворять уравнению

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2}=0. \tag{6}$$

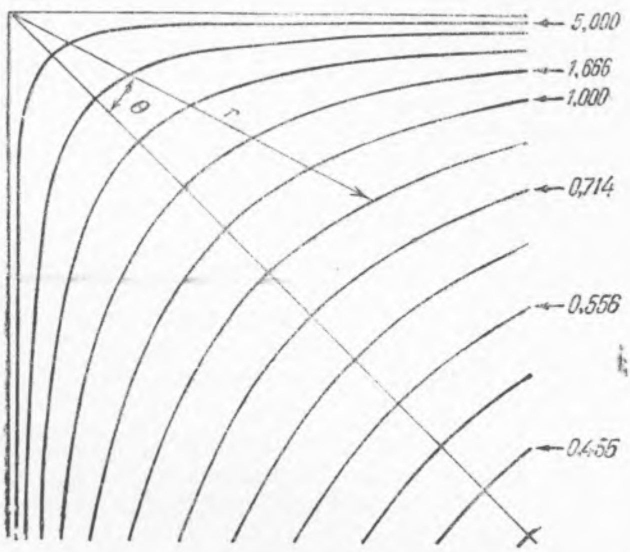

Рис. 2

Если ввести новые переменные

$$\xi=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\vartheta,$$

$$\eta=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\vartheta, \tag{7}$$

то, как известно ([2]), функция

$$\Phi^*(\xi, \eta)=\Phi(\theta, \vartheta) \tag{8}$$

будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\eta^2}=0. \tag{9}$$

При преобразовании переменных (7) сфера переходит во всю плоскость комплексной переменной $\zeta=\xi+i\eta=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$, причем следу от пересечения плоского клина L со сферой соответствует прямоугольный разрез, идущий от точки $\xi=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\eta=0$ до точки $\xi=+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\eta=0$.

Согласно (1), (5) и (8) $\Phi^*(\xi, \eta)$ принимает значение, равное c на верхнем и нижнем краях этого разреза. Кроме того, мы будем считать, что функция $\Phi^*(\xi, \eta)$ обладает на бесконечности логарифмической особенностью; тогда производные от $\varphi(x, y, z)$ будут на бесконечности исчезать, что соответствует исходному требованию (функция $\Phi^*(\xi, \eta)$ не может быть регулярной всюду, так как в этом случае она была бы равна постоянной). Таким образом, искомая гармоническая функция обладает некоторыми свойствами логарифмического потенциала, что, впрочем, естественно.

Нетрудно показать (см. ([3])), что

$$\Phi^*(\xi, \eta)=\operatorname{Re} w(\zeta)+c, \tag{10}$$

где

$$w(\zeta)=K\lg\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right),$$

или, выражая через θ и ϑ:

$$\Phi(\theta, \vartheta) = \operatorname{Re}\left[K \lg\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} + \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} e^{2i\varphi} - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)\right] + c. \tag{11}$$

Определим давление, возникающее под штампом. Имеем:

$$p(r, \theta) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial\Phi(\theta, \vartheta)}{\partial z}\right]_{z=0}. \tag{12}$$

На половине разреза, где $\vartheta = 0$, между точками $\xi = 0$, $\eta = 0$ и $\xi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\eta = 0$ будем иметь

$$\left[\frac{\partial\Phi(\theta, \vartheta)}{\partial z}\right]_{z=0} = \left[\frac{\partial\Phi(\theta, \vartheta)}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=0}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right]_{\vartheta=0}.$$

На основании (3):

$$\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right]_{\vartheta=0} = \left[\frac{1}{r\sin\theta\cos\vartheta}\right]_{\vartheta=0} = \frac{1}{r\sin\theta}.$$

С другой стороны:

$$\left[\frac{\partial\Phi(\theta, \vartheta)}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=0} = \left[\frac{\partial\Phi^*(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=0}.$$

Из (7) следует, что

$$\left[\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=0} = \left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\vartheta\right]_{\vartheta=0} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Поэтому

$$\left[\frac{\partial\Phi(\theta, \vartheta)}{\partial z}\right]_{z=0} = \left[\frac{\partial\Phi^*(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}\right]_{\vartheta=0}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right]_{\vartheta=0} =$$

$$= \left[\frac{\partial\Phi^*(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}\frac{1}{r\sin\theta}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{13}$$

Но если $\Phi^*(\xi, \eta) = \operatorname{Re} w(\zeta) + c$, то

$$\frac{\partial\Phi^*(\xi, \eta)}{\partial\eta} = -\operatorname{Im} w'(\zeta). \tag{14}$$

Из (10) получим

$$w'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} K \lg\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{K}{\sqrt{\zeta^2 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}. \tag{15}$$

Под штампом $-\alpha/2 < \theta < +\alpha/2$. Следовательно, при $\eta = 0$ и $\xi < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ будем иметь

$$w'(\zeta) = \frac{K}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{-iK}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Из (13) следует, что при $\xi < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\left[\frac{\partial \Phi^*(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right]_{\eta=0} = -\operatorname{Im} w'(\zeta) = \frac{K}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}}. \tag{16}$$

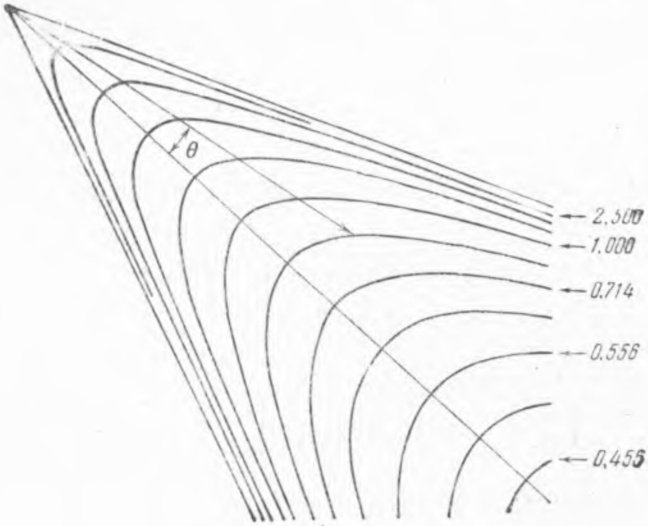

Рис. 3

На основании (12), (13) и (16) получим

$$p(r, \theta) = -K \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{r \sin\theta} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}},$$

или, после некоторых преобразований,

$$p(r, \theta) = K \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{r(1+\cos\theta)\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}}. \tag{17}$$

Здесь θ отсчитывается от биссектрисы угла при вершине клина. В выражение для величины давления входит множитель K; он может быть определен, если известно суммарное давление, действующее на какой-нибудь ограниченый сектор.

На рис. 2 и 3 показаны распределения давлений под штампами в виде бесконечного клина с углами при вершине $\pi/2$ и $\pi/4$; на них нанесены кривые, вдоль которых давление остается постоянным.

Нетрудно также заметить, что при стремлении угла α к нулю распределение давлений вдоль прямой, перпендикулярно биссектрисе, стремится к тому, которое получается на основании решения плоской задачи ([3]). Если ввести переменную $s = \operatorname{tg}\theta$, причем вдоль указанной прямой, находящейся на расстоянии H от вершины угла, будем иметь $-a < s < a$ ($a = \operatorname{tg}\alpha$), то из (16) получим при $\alpha \to 0$

$$p^*(s) = K \frac{E}{2(1-\nu^2)H} \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}}. \tag{18}$$

Поступило
17 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, 1937. [2] E. W. Hobson, Proc. London Math. Soc., 22 (1891). [3] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи математической теории упругости, 1935.