Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

К. П. СТАНЮКОВИЧ

ДВУСТОРОННЕЕ ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА В ТРУБУ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 5 IV 1947)

В ряде технических вопросов, которые приходится решать методами современной газовой динамики, часто встречается такая задача: газ истекает из цилиндрического сосуда длины l в трубу в обе стороны, причем истечение начинается не одновременно. В начальном состоянии газ покоится, а его давление и плотность постоянны.

Если давление в трубе равно 0 (истечение в пустоту) или практически мало по сравнению с начальным, то поставленная задача решается сравнительно просто.

Пусть истечение направо начинается в момент времени $t=0$ при $x=0$. В этом случае возникает волна разрежения, двигающаяся налево; эта волна может быть описана римановским решением уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial t}+u\frac{\partial \ln\rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{2}$$

причем считается, что $\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\text{const}$.

Римановское решение имеет вид ([1], стр. 308—313, [2]):

$$x=(u-c)t, \tag{3}$$

$$u=\frac{2}{\gamma-1}(c_{н}-c), \tag{4}$$

где $c_{н}$ — скорость звука в покоющемся газе. Отсюда ясно, что фронт волны разрежения движется со скоростью $-c_{н}$.

Пусть, далее, в момент времени $0<\tau\leqslant l/c_{н}$ начинается истечение налево. При этом возникает также римановская волна разрежения:

$$x+l=(u+c)(t-\tau), \tag{5}$$

$$u=\frac{2}{\gamma-1}(c-c_{н}), \tag{6}$$

фронт которой движется направо со скоростью $c_{н}$.

В момент времени $\bar{t}=\frac{\tau}{2}+\frac{l}{2c_{н}}$ при $\bar{x}=\frac{l}{2}-\frac{c_{н}\tau}{2}$ обе волны встречаются, причем между ними возникает новая волна, распространяющаяся в обе стороны. Очевидно, что эта волна описывается общим решением уравнений (1) и (2), которое мы напишем в виде ((1), стр. 337—341):

$$\psi=\frac{\partial^{k-1}}{\partial i^{k-1}}\frac{F_1[\sqrt{2(2k+1)\,i}+u]+F_2[\sqrt{2(2k+1)\,i}-u]}{\sqrt{i}}, \tag{7}$$

где $t=\frac{\partial\psi}{\partial i}$, $x=ut-\frac{\partial\psi}{\partial u}$, $i=\frac{c^2}{\gamma-1}$ и решение имеет смысл для $\gamma=\frac{2k+3}{2k+1}$ (k — целое число).

Римановские решения являются характеристиками искомого. Исходя из того, что ψ на характеристиках задано, а именно:

на характеристике $u=\frac{2}{\gamma-1}(c_н-c)=\sqrt{2(2k+1)}\,[\sqrt{i_н}-\sqrt{i}\,]$ $\psi=0$;

на характеристике $u=\frac{2}{\gamma-1}(c-c_н)=\sqrt{2(2k+1)}\,[\sqrt{i}-\sqrt{i_н}]$

$$\frac{d\psi}{di}=\sqrt{\frac{2(2k+1)}{i}}\,l\left[\frac{1}{2}+\frac{\tau}{l}\frac{2(k+1)\sqrt{i}-(2k+1)\sqrt{i_н}}{\sqrt{2(2k+1)}}\right]$$

можно определить F_1 и F_2.

Первое условие дает, что $F_2\equiv 0$, второе определяет F_1. Отсюда

$$\psi=\frac{\tau}{2k!\,[2(2k+1)]^{k+\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{\partial^{k-1}}{\partial i^{k-1}}\left\{\frac{\left[\sqrt{2(2k+1)}\,(\sqrt{i}+\sqrt{i_н})+u\right]^k\left[\sqrt{2(2k+1)}\,(\sqrt{i}-\sqrt{i_н})+u\right]^k}{\sqrt[4]{i}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left[\sqrt{2(2k+1)\,i}+u+\frac{(2k+1)\,l}{\tau}\right]}{\sqrt[4]{i}}\right\}. \tag{8}$$

В том случае, когда истечение начинается одновременно ($\tau=0$):

$$\psi=\frac{}{4k!\,[2(2k+1)]^{k-\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{\partial^{k-1}}{\partial i^{k-1}}\frac{\left[\sqrt{2(2k+1)}\,(\sqrt{i}+\sqrt{i_н})+u\right]^k\left[\sqrt{2(2k+1)}\,(\sqrt{i}-\sqrt{i_н})+u\right]^k}{\sqrt{i}}. \tag{9}$$

Очевидно, что это решение эквивалентно волне, образующейся при отражении римановской волны разрежения от стенки, поставленной посредине сосуда.

Представляет существенный интерес изучить распределение масс, количеств движений и энергии, переносимых в противоположных направлениях (при $t\to\infty$).

Соответствующие вычисления приводят к результату:

направо движется:

$$M_1=\frac{M_н}{2}\left[\frac{(2k+1)!\,c_н\tau}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!\,l}+1\right],$$

$$J_1=\sqrt{\frac{M_н E_н}{2}}\sqrt{2k+3}\left[\frac{c_н\tau}{(2k+3)\,l}+\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!}\right]$$

$$E_1=\frac{E_н}{2}\left[\frac{(2k+3)!\,c_н\tau}{2^{2(k+1)}(k+1)!\,(k+2)!\,l}+1\right];$$

налево движется:

$$M_2=\frac{M_н}{2}\left[1-\frac{(2k+1)!\,c_н\tau}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!\,l}\right],$$

$$J_2=\sqrt{\frac{M_нE_н}{2}}\sqrt{2k+3}\left[\frac{c_н\tau}{(2k+3)\,l}-\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!}\right],$$

$$E_2=\frac{E_н}{2}\left[1-\frac{(2k+3)!\,c_н\tau}{2^{2(k+1)}(k+1)!\,(k+2)!\,l}\right],$$

где $E_н$ — полная энергия газа, $M_н$ — его масса.

Очевидно, что при $\tau=0$

$$M_1=M_2=M_н/2,\quad E_1=E_2=E_н/2,$$

$$J_1=-J_2=\sqrt{M_нE_н}\,\frac{(2k+1)!\sqrt{2(2k+3)}}{2^{2(k+1)}(k+1)!\,k!}. \tag{10}$$

В случае $\gamma=3$ $(k=0)$ формулы принимают вид:

$$M_1=\frac{M_н}{2}\left[\frac{c_н\tau}{2l}+1\right],$$

$$J_1=\sqrt{\frac{3}{2}E_нM_н}\left[\frac{c_н\tau}{3l}+\frac{1}{2}\right],$$

$$E_1=\frac{3}{2}E_н\left[\frac{c_н\tau}{4l}+\frac{1}{3}\right],$$

$$M_2=\frac{M_н}{2}\left[1-\frac{c_н\tau}{2l}\right],$$

$$J_2=\sqrt{\frac{3}{2}E_нM_н}\left[\frac{1}{2}-\frac{c_н\tau}{3l}\right],$$

$$E_2=\frac{3}{2}E_н\left[\frac{1}{3}-\frac{c_н\tau}{4l}\right].$$

При $\tau=0$

$$J_1=-J_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}E_нM_н}.$$

В случае $\gamma=1$ $(k\to\infty)$ формулы принимают вид:

$$M_1=M_2=\frac{M_н}{2},\quad E_1=E_2=\frac{E_н}{2},\quad J_1=-J_2=\sqrt{\frac{E_нM_н}{\pi}}$$

(для любого τ).

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что перераспределение масс и энергий, идущих в противоположных направлениях, уменьшается с уменьшением γ. При $\gamma\to1$ перераспределение $\to 0$.

Рассмотрение задачи об отражении волн разрежения от стенки (случай $\tau=0$) позволяет вычислить величину импульса, который принимает стенка; очевидно, этот импульс равен количеству движения, который имеет разлетающийся газ, причем этот импульс определяется формулой (10). С уменьшением γ от 3 к 1 импульс незначительно падает.

В самом деле, при $\gamma=3$ $J=0{,}614\sqrt{M_н E_н}$; при $\gamma=1$ $J=0{,}565\sqrt{M_н E_н}$.

Если бы истечение газа подчинялось стационарным условиям, то

$$J=\frac{1}{2}\sqrt{2E_н M_н}=0{,}708\sqrt{M_н E_н},$$

т. е. импульс был бы несколько больше. В общем, для обычного газа можно считать, что импульс, действующий при нестационарном истечении, составляет 80% от импульса стационарного истечения.

Уменьшение импульса происходит вследствие перераспределения энергии по массе внутри потока, в котором головная часть, имеющая малую массу, движется значительно быстрее тыловой части, которая имеет большую массу.

Поступило
1 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1944. [2] Л. Ландау и К. Станюкович, ДАН, 47, № 3 (1945).