Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩЕМСЯ ИНТЕГРАЛЕ ЛАПЛАСА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 VIII 1947)

В этой заметке мы дадим необходимые и достаточные условия для того, чтобы функцию $f(x)$ можно было представить абсолютно сходящимся интегралом

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}F(t)\,dt$$

при $x>a$ (о работах других авторов см. (1) и (2)). Несобственный интеграл будем рассматривать как предел лебеговых интегралов:

$$\int_0^\infty e^{-xt}F(t)\,dt=\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-xt}F(t)\,dt.$$

Пусть $g(x)$ — функция, которую при $x>a$ можно представить в виде

$$g(x)=\int_0^\infty e^{-xt}G(t)\,dt,$$

где $G(t)\geqslant 0$. Мы обозначим через $G_k(t)$ оператор Пост—Виддера

$$G_k(t)=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}g^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right).$$

Доказательство наше основывается на следующих трех леммах:

Лемма 1. *Функция* $e^{-xt}G_k(t)$ *суммируема в интервале* $(0, k/x)$ *при* $x>a$.

Доказательство. Так как функция $g(x)$ регулярно монотонна и стремится к нулю вместе с $1/x$, то $g^{(k)}(x)=o(x^{-k})$. Из этого заключаем, интегрируя по частям, что интеграл

$$g(x)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_x^\infty g^{(k)}(t)(t-x)^{k-1}\,dt$$

сходится. Подставляя $t=k/u$, находим

$$g(x)=\int_0^{k/x}\left(1-\frac{xu}{k}\right)^{k-1}G_k(u)\,du.$$

Суммируемость функции $e^{-xt}G_k(t)$ вытекает, следовательно, из

$$0\leqslant e^{-xt}G_k(t)\leqslant\frac{\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)}{e\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1}}.$$

Лемма 2. *Пусть E — любое измеримое множество, лежащее в конечном интервале $(0, b)$. При $x > a$ имеет место*

$$\lim_{k \to \infty} \int_E e^{-xt} G_k(t)\, dt = \int_E e^{-xt} G(t)\, dt \qquad 1$$

(*мы установим также и существование предела*).

Доказательство. При $k > bx$ имеем:

$$\int_E e^{-xt} G_k(t)\, dt = \int_E e^{-xt} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \left[\int_0^\infty e^{-k\tau/t} \tau^k G(\tau)\, d\tau\right] dt;$$

после подстановки $\tau/t = u$, на основании теорем Фубини и Тонелли можно переменить порядок интеграции:

$$\int_E e^{-xt} G_k(t)\, dt = \frac{k^{k+1}}{k!} \int_0^\infty e^{-ku} u^k \left[\int_E e^{-xt} G(tu)\, dt\right] du\,.$$

Для того чтобы показать существование предела (1) и вычислить его значение, достаточно установить, что

$$\lim_{u \to 1} \int_E e^{-xt} G(tu)\, du = \int_E e^{-xt} G(t)\, dt$$

(см., например, (3), стр. 130). Очевидно, имеем

$$\left| \int_E e^{-xt} G(tu)\, dt - \int_E e^{-xt} G(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty e^{-xt} |G(tu) - G(t)|\, dt. \qquad (2)$$

Пусть ε — положительное число. Можно подобрать $p > 0$ так, что $\int_{p/2}^\infty e^{-\frac{x}{2}t} G(t)\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$ и, следовательно,

$$\int_p^\infty e^{-xt} G(tu)\, dt = \int_{up}^\infty e^{-x\lambda/u} G(\lambda)\, d\lambda \leqslant \int_{p/2}^\infty e^{-x\lambda/2} G(\lambda)\, d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{5},$$

если $1/_2 \leqslant u \leqslant 2$. С другой стороны, в $[0,2p]$ существует такая непрерывная функция $P(t)$, что $\int_0^{2p} |G(t) - P(t)|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{5}\cdot$ Из этого заключаем, что

$$\int_0^p e^{-xt} |G(tu) - G(t)|\, dt \leqslant \int_0^p e^{-xt} |G(tu) - P(tu)|\, dt +$$

$$+ \int_0^p e^{-xt} |G(t) - P(t)|\, dt + \int_0^p e^{-xt} |P(tu) - P(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2p} |G(t) - P(t)|\, dt + \int_0^p |G(t) - P(t)|\, dt + \int_0^p |P(tu) - P(t)|\, dt. \qquad (3)$$

Так как функция $P(t)$ равномерно непрерывна в замкнутом интервале $[0,2p]$, то можно подобрать такое положительное число δ, чтобы последний интеграл в (3) был $\leqslant \frac{\varepsilon}{5}$ при $|u - 1| \leqslant \delta$, и, следовательно, выражение (2) $\leqslant \varepsilon$.

Лемма 3. *Пусть b — любое положительное число. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\int_d^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\,dt=\int_b^{\infty}e^{-xt}G(t)\,dt$$

(мы установим также и существование предела).

Доказательство. На основании одного результата Виддера [2] имеем почти всюду $\lim\limits_{k\to\infty}G_k(t)=G(t)$ и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)=e^{-xt}G(t).$$

На основании леммы 3 имеем: $\int\limits_E e^{-\lambda t}G_k(t)\,dt=\int\limits_E e^{-\lambda t}G(t)\,dt$ для каждого измеримого множества E, находящегося в интервале $(0, b)$, если $\lambda>a$. С другой стороны, $0\leqslant\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\leqslant e^{-\lambda t}G_k(t)$ при $x>\lambda$, $k>bx$ и $k>\frac{x}{x-\lambda}$, и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{b}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\,dt=\int_0^{b}e^{-xt}G(t)\,dt. \tag{4}$$

Так как функция $g(x)$ регулярно монотонна и стремится к нулю вместе с $1/x$, то $g^{(k)}(x)=o(x^{-k})$, откуда, интегрируя по частям,

$$g(x)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_x^{\infty}g^{(k-1)}(u)(u-x)^{k-1}du$$

и, следовательно,

$$g(x)=\int_0^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\,dt=\int_0^{\infty}e^{-xt}G(t)\,dt. \tag{5}$$

На основании (4) и (5) получаем:

$$\lim_{k\to\infty}\int^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}G_k(t)\,dt=\int_b^{\infty}e^{-xt}G(t)\,dt.$$

Теорема. *Для того чтобы бесконечно дифференцируемую функцию $f(x)$ можно было представить при $x>a$ в виде абсолютно сходящегося интеграла*

$$f(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}F(t)\,dt,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $g(x)$, которую можно представить в виде интеграла того же типа:

$$g(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}G(t)\,dt,\quad x>a,$$

причем $G(t)\geqslant 0$, так что $|f^{(k)}(x)|\leqslant(-1)^k g^{(k)}(x)$ при $x>a$, $k=0, 1, \ldots$

Доказательство. Условие, очевидно, необходимо. Мы покажем, что оно и достаточно. Рассмотрим операторы Пост—Виддера:

$$F_k(t)=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right), \quad G_k(t)=\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} g^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right).$$

Пусть E — любое измеримое множество интервала $(0, b)$. Мы доказали существование предела

$$\lim_{k\to\infty}\int_E e^{-\alpha t} G_k(t)\,dt \tag{6}$$

при $\alpha > a$. Из этого следует равностепенная абсолютная непрерывность интегралов (6). Из этого, в свою очередь, вытекает равностепенная абсолютная непрерывность интегралов $\int_E e^{-\alpha t} F_k(t)\,dt$, так как они мажорируются интегралами (6). Следовательно, можно подобрать последовательность целых чисел $k_1, k_2, \ldots$ так, чтобы

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_E e^{-\alpha t} F_{k_\nu}(t)\,dt \tag{7}$$

существовал при всех ограниченных и измеримых множествах E, находящихся в интервале $(0, \infty)$. Обозначим предел (7) через $\int_E R(t)\,dt$. Очевидно, $|R(t)| \leqslant e^{-\alpha t} G(t)$. Мы теперь покажем, что при $x > \alpha$

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt} e^{\alpha t} R(t)\,dt. \tag{8}$$

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим

$$\Delta=f(x)-\int_0^\infty e^{-xt}e^{\alpha t}R(t)\,dt=\int_0^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}F_k(t)\,dt-\int_0^\infty e^{-(x-\alpha)t}R(t)\,dt.$$

Выберем b достаточно большим, чтобы иметь $\int_b^\infty e^{-xt} G(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Очевидно, при $k > bx$, $x > \alpha$, $k > \frac{x}{x-\alpha}$

$$|\Delta| \leqslant \int_0^b \left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1} e^{\alpha t}\,|e^{-\alpha t}F_k(t)-R(t)|\,dt+\int_0^b \left|\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}-\right.$$

$$\left.-e^{-xt}\right| e^{\alpha t}\,|R(t)|\,dt+\int_b^{k/x}\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}|F_k(t)|\,dt+\int_b^\infty e^{-(x-\alpha)t}|R(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^b |e^{-\alpha t}F_k(t)-R(t)|\,dt+\int_0^b\left|\left(1-\frac{xt}{k}\right)^{k-1}-e^{-xt}\right|G(t)\,dt+\varepsilon.$$

Из этого получаем, при неограниченном возрастании $k=k_\nu$, что $|\Delta| \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $\Delta=0$. Пользуясь теоремой единственности представления функции в виде (8), заключаем, пренебрегая множеством меры нуль, что $e^{\alpha t}R(t)$ не зависит от выбора $\alpha > a$, чем и заканчивается наше доказательство.

Поступило
23 VIII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Acta Math., **52**, 1 (1928). [2] D. V. Widder, Trans. AMS, **36**, 107, (1934). [3] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.