Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. А. САПОГОВ

О СИНГУЛЯРНЫХ ЦЕПЯХ МАРКОВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 IV 1947)

1. Пусть x_h $(1 \leqslant h \leqslant n)$ — случайные величины, образующие цепь Маркова, принимающие значения ± 1 с вероятностями a priori p'_h, q_h и вероятностями перехода p'_h, q'_h (если $x_{h-1}=1$) и p''_h, q''_h (если $x_{h-1}=-1$). С. Н. Бернштейн доказал, что предельная теорема Лапласа — Ляпунова приложима к сумме $S_n=\sum\limits_1^n x_h$ при $n\to\infty$, если p'_h, q'_h, p''_h, q''_h не меньше $1/n^\alpha$, где $\alpha<1/3$ — постоянное число [1]. Им же было показано, что при $\alpha=1/3$ предельная теорема может не иметь места [2]. Нашей целью является дать ответ на вопрос, поставленный С. Н. Бернштейном в 1939 г. на семинаре по теории вероятностей в Ленинградском государственном университете, о возможности безграничного приближения α к $1/3$ (вместе с $n\to\infty$) при сохранении приложимости предельной теоремы к сумме $\sum\limits_1^n x_h$. Имеет место

Теорема *. *Если p'_h, q'_h, p''_h, q''_h не меньше $\frac{\varphi(n)}{n^{1/3}}$, где произвольная возрастающая функция $\varphi(n)\to\infty$, то предельная теорема приложима к $S_n=\sum\limits_1^n x_n$.*

2. Для доказательства формулированной теоремы сначала установим следующую лемму.

Лемма. *Пусть u_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ — случайные величины,* м. о. $u_i=0$, м. о. $u_i^2=b_i$, м. о. $\left(\sum\limits_1^n u_i\right)^2=B_n$, $|$м. о.$'\, u_i|\leqslant\alpha_i$, *каковы бы ни были u_k $(k<i)$,* м. о.$'$ u_i^2 *уклоняется от* м. о. u_i^2 *не более, чем на β_i, и $c'_i=\max$* м. о.$'$ $|u_i|^3$ *при всех возможных u_k $(k<i)$* (м. о.$'$ — *знак условного математического ожидания*).

Если

$$1)\ \frac{\sum\limits_1^n \alpha_i}{\sqrt{B_n}}\to 0,\quad \frac{\sum\limits_1^n \beta_i}{B_n}\to 0\quad \text{при } n\to\infty,$$

* Доказательство этого предложения для симметричной цепи $(p'_h=q''_h,\ p_h=q_h=1/2)$ содержится в [3].

$$2)\ \frac{b_i}{b_k} < P,\ \frac{c'_k}{b_k^{2/3}} < P \quad \text{при всех } i \text{ и } k,$$

где P — постоянное число, то предельная теорема приложима к сумме $\sum_1^n u_i$ зависимых величин u_i.

Действительно, в силу первой части условий 1) имеем $B_n \sim \sum_1^n b_i$ см. ([2]), § 9), где знак $\sim$ обозначает асимптотическое равенство ($n \to \infty$).

$$nb_i < P \sum_1^n b_k \sim PB_n$$

вследствие 2), а также

$$nb_k > \frac{\sum_1^n b_i}{P} \sim \frac{B_n}{P}, \quad \sum_1^n c'_k < P \sum_1^n b_k^{3/2} < P^{5/2}\, nb_i^{3/2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sum_1^n c'_k}{B_n^{3/2}} \sim \frac{\sum_1^n c'_k}{\left(\sum_1^n b_k\right)^{3/2}} < \frac{P^{3/2} \sum_1^n c'_k}{n^{3/2}\ b_i^{3/2}} < \frac{P^4 nb_i^{3/2}}{n^{3/2}\, b_i^{3/2}} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Вместе с условиями 1) это показывает, что u_i являются почти независимыми величинами, следовательно, к ним приложима предельная теорема (см. ([2]), § 9).

3. Мы будем пользоваться обозначениями и соотношениями из работы ([1]). Они получены при предположении, что $\alpha < 1/3$ — постоянное число. При нашей гипотезе в этих соотношениях С. Н. Бернштейна следует всюду n^α заменить на $\frac{n^{1/3}}{\varphi(n)}$. Вместо (30 bis) из ([1]) мы получаем

$$B_n = \text{м. о. } (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)^2 > n^{2/3}\, \varphi(n). \tag{1}$$

Вместо (82) из ([1]) будет

$$\frac{\text{м. о. } (Y_m + Y_{m+1} + \ldots + Y_{m+k})^4}{[\text{м. о. } (Y_m + Y_{m+1} + \ldots + Y_{m+k})^2]^2} < 6 + \frac{128\, n^{2/3}}{\varphi^2(n)\, \text{м. о. } (Y_m + Y_{m+1} + \ldots + Y_{m+k})^2}. \tag{2}$$

Это неравенство содержит математические ожидания a priori. Ничто в вычислениях С. Н. Бернштейна не изменится, если все входящие вероятности p_h и q_h заменить на p_h^* и q_h^*, вычисленные в предположении, что Y_{m-1} получило определенное значение (так что следует положить $Y_h = x_h - (p_h^* - q_h^*)$, $h \geqslant m$). Такие условные математические ожидания измененных величин Y_h отметим двумя штрихами. Получим неравенство

$$\frac{\text{м. о.}'' (Y\ \ + \ldots + Y_{m+k})^4}{[\text{м. о.}'' (Y_m + \ldots + Y_{m+k})^2]^2} < 6 + \frac{128\, n^{2/3}}{\varphi^2(n)\, \text{м. о.}'' (Y_m + \ldots + Y_{m+k})^2} \cdot \tag{2 bis}$$

Представим сумму величин Y_i в виде суммы l слагаемых $u_i = Y_{h_{i-1}+1} + Y_{h_{i-1}+2} + \ldots + Y_{h_i}$ $(1 \leqslant i < l)$, где индексы последовательно определяются из условия, что h_i является наименьшим индексом, для которого м. о. $u_i^2 \geqslant n^{1/3}\sqrt{\frac{B_n}{\varphi(n)}}$, откуда следует, что м. о. $u_i^2 \sim n^{1/3}\sqrt{\frac{B_n}{\varphi(n)}}$ (кроме, может быть, м. о. u_l^2, для которого возможен знак $<$). Согласно одной из основных теорем теории цепей, установленной А. А. Марковым,

$$|p^*_{m+i} - p_{m+i}| + |q^*_{m+i} - q_{m+i}| < 2\left(1 - \frac{2\varphi(n)}{n^{1/3}}\right)^i,$$

каково бы ни было Y_{m-1}. Поэтому

$$|\text{м. о. } u_k(u_{k+1} + \ldots + u_l)| \leqslant \text{м. о.} |u_k| \left[2 + 2\left(1 - \frac{2\varphi(n)}{n^{1/3}}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\left(1 - \frac{2\varphi(n)}{n^{1/3}}\right)^2 + \ldots\right] \leqslant \sqrt{b_k}\,\frac{n^{1/3}}{\varphi(n)} \sim n^{1/2}\sqrt{\frac{B_n}{\varphi^5(n)}}.$$

Следовательно,;

$$B_n = \sum_1^l \text{м. о. } u_i^2 + 2\sum_1^{l-1} \text{м. о. } u_i(u_{i+1} + \ldots + u_l) = (1 + \varepsilon)\, l n^{1/3}\sqrt{\frac{B_n}{\varphi(n)}}$$

где $\varepsilon \to 0$ вместе с $\frac{1}{n}$, что дает $l \sim \frac{\sqrt{B_n \varphi(n)}}{n^{1/3}}$.

4. Покажем теперь выполнимость условий леммы п. 2 для величин u_i

$$|\text{м. о.}'\, u_i| \leqslant \frac{n^{1/3}}{\varphi(n)} = \alpha_i,$$

поэтому

$$\frac{\sum\limits_1^l \alpha i}{\sqrt{B_n}} = \frac{n^{1/3} l}{\varphi(n)\sqrt{B_n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\varphi(n)}} \to 0.$$

Далее

$$\text{м. о.}'\,(Y_m + \ldots + Y_{m+k})^2 = \sum_{i=0}^{k} \text{м. о.}'\, Y_{m+i}(Y_{m+i} + 2Y_{m+i+1} + \ldots + 2Y_{m+ik})$$

$$\text{м. о.}'\, Y_{m+i}(Y_{m+i} + 2Y_{m+i+1} + \ldots + Y_{m+k}) - \text{м. о. } Y_{m+i}(Y_{m+i} + 2Y_{m+i+1} +$$
$$+ \ldots + 2Y_{m+k})| < 2\left(1 - \frac{2\varphi(n)}{n^{1/3}}\right)^i \max|\text{м. о.}'\,(Y_{m+i} +$$
$$+ 2Y_{m+i+1} + \ldots + 2Y_{m+k})| \leqslant 4\left(1 - \frac{2\varphi(n)}{n^{1/3}}\right)^i \frac{n^{1/3}}{\varphi(n)}.$$

Следовательно,

$$\beta_k \leqslant \frac{4n^{1/3}}{\varphi(n)} \sum_0^\infty \left(1 - \frac{2\varphi(n)}{n^{1/3}}\right)^l = \frac{2n^{2/3}}{\varphi^2(n)},$$

откуда

$$\frac{\sum\limits_{1}^{l} \beta_k}{B_n} < \frac{2n^{2/3}}{\varphi^{5/2}(n)^{1/3} \sqrt{B_n}} \sim \frac{2}{\varphi^2(n)} \to 0.$$

Неравенства $\frac{b_i}{b_k} < P$ очевидны. Остается доказать, что $\frac{c_k'}{b_k^{3/2}} < P$.

Из (2 bis) видим, что

$$\frac{\text{м. о.}'' u_k^4}{[\text{м. о.}'' u_k^2]^2} < P$$

вследствие того, что

$$\text{м. о.}'' u_k^2 = \text{м. о.}' u_k^2 + H_1 \frac{n^{2/3}}{\varphi^2(n)} = \text{м. о. } u_k^2 + H_2 \frac{n^{2/3}}{\varphi^2(n)} \; *,$$

и неравенства

$$\text{м. о. } u_k^2 \geqslant n^{1/3} \sqrt{\frac{B_n}{\varphi(n)}} \geqslant n^{2/3} \sqrt{\varphi(n)}$$

(благодаря (1)).

Приняв во внимание, что

$$\text{м. о.}'' u_k^4 = \text{м. о.}' u_k^4 + H_3 \frac{n^{1/3}}{\varphi(n)} c_k' + H_4 \frac{n^{2/3}}{\varphi^2(n)} b_k + H_5 \frac{n^{4/3}}{\varphi^4(n)},$$

где H_i ограничены, получаем

$$\frac{\text{м. о}'.\, u_k^4 + H_6 \frac{n^{1/3}}{\varphi(n)} c_k'}{[\text{м. о.}' u^2]^2} < (1 + \varepsilon')P$$

и, тем более,

$$\frac{c_k'}{[\text{м. о.}' u_k^2]^{3/2}} + \frac{H_6 \frac{n^{1/3}}{\varphi(n)} c_k'}{[\text{м. о.}' u_k^2]^2} < (1 + \varepsilon')P,$$

откуда

$$\frac{c_k'}{b_k^{3/2}} < (1 + \varepsilon'')P,$$

где $\varepsilon', \varepsilon'' \to 0$, что завершает доказательство нашей теоремы.

Научно-исследовательский
институт математики и механики
Ленинградского государственного
университета

Поступило
13 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

[1] С. Бернштейн, ДАН (1928). [2] S. Bernstein, Math. Ann., 97 (1927). [3] Н. А. Сапогов, Диссертация, Ленинградск. гос. ун-т, 1946.

* Напомним, что условное м. о.'' относится к величинам $Y_h = x_h - (p_h^* - q_h^*)$, а м. о.' — к величинам $Y_h = x_h - (p_h - q_h)$.