Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 6

МЕХАНИКА

В. В. НОВОЖИЛОВ

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

(Представлено академиком Б. Г. Галеркиным 16 III 1940)

1. Преобразование уравнений. Дифференциальные уравнения упругого равновесия сферической оболочки, исходя из общей теории тонких оболочек A. E. H. Love, могут быть написаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial\theta}+(T_1-T_2)\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial S_2}{\partial\theta}=N_1-aX(\theta,\varphi),\\
&\frac{\partial S_1}{\partial\theta}+(S_1-S_2)\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial T_2}{\partial\varphi}=N_2-aY(\theta,\varphi),\\
&\frac{\partial N_1}{\partial\theta}+N_1\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+T_1+T_2=-aZ(\theta,\varphi),\\
&\frac{\partial G_1}{\partial\theta}+(G_1-G_2)\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_2}{\partial\varphi}=aN_1,\\
&\frac{\partial H_1}{\partial\theta}+(H_1-H_2)\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial G_2}{\partial\varphi}=-aN_2,\\
&\qquad\qquad S_1+S_2=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где a—радиус сферы, t—толщина оболочки, θ и φ—сферические координаты, $X(\theta,\varphi)$, $Y(\theta,\varphi)$, $Z(\theta,\varphi)$—проекции удельной нагрузки.

Воспользовавшись известными формулами, связывающими внутренние усилия и моменты с деформациями срединной поверхности,

$$\left.\begin{aligned}
&T_1=\frac{Et}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2),\qquad T_2=\frac{Et}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1),\\
&S_1=-S_2=\frac{Et}{2(1+\sigma)}\,\omega,\\
&G_1=-D\left[\varkappa_1+\sigma\varkappa_2+\frac{1}{a}(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2)\right],\\
&G_2=-D\left[\varkappa_2+\sigma\varkappa_1+\frac{1}{a}(\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1)\right],\\
&H_1=-H_2=D(1-\sigma)\tau,
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

в которых применительно к сферической оболочке:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}-w\right);\quad \varepsilon_2=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\operatorname{ctg}\theta-w\right);\\
&\omega=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right);\quad \varkappa_1=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\right),\\
&\varkappa_2=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+u\operatorname{ctg}\theta\right),\\
&\tau=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial\varphi}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial\theta}-v\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

мы можем после подстановки (2) в (1) привести исходную систему дифференциальных уравнений к виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{Et}{(1-\sigma^2)a}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-(\operatorname{ctg}^2\theta+\sigma)u+\frac{1-\sigma}{2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1+\sigma}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial\varphi}-\frac{3-\sigma}{2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-(1+\sigma)\frac{\partial w}{\partial\theta}\right\}=N_1-aX(\theta,\varphi),\\
&\frac{Et}{(1-\sigma^2)a}\left\{\frac{1-\sigma}{2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}+(1-\operatorname{ctg}^2\theta)v\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1+\sigma}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{3-\sigma}{2}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{1+\sigma}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right\}=N_2-aY(\theta,\varphi),\\
&\frac{\partial N_1}{\partial\theta}+N_1\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+\frac{Et}{(1-\sigma)a}\left\{\frac{\partial u}{\partial\theta}+u\operatorname{ctg}\theta+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-2w\right\}=-aZ(\theta,\varphi),\\
&\frac{D}{a^3}\left\{\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+(1-\operatorname{ctg}^2\theta)\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta\partial\varphi^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right\}=\\
&\quad=-\left(1+\frac{t^2}{6a^2}\right)N_1+\frac{t^2}{6a}X(\theta,\varphi),\\
&\frac{D}{a^3}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^2\partial\varphi}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi^3}+\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right\}=\\
&\quad=-\left(1+\frac{t^2}{6a^2}\right)N_2+\frac{t^2}{6a}Y(\theta,\varphi).
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Введем вспомогательные функции

$$\left.\begin{aligned}
U&=\frac{\partial u}{\partial\theta}+u\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-(1+\sigma)w,\\
V&=\frac{\partial v}{\partial\theta}+v\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

и обозначим операцию Лапласа в сферических координатах через

$$\Delta(\ )=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial(\ )}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2(\ )}{\partial\varphi^2}.$$

Тогда с помощью новых обозначений система (4) может быть записана следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{Et}{(1-\sigma^2)a}\left\{\frac{\partial U}{\partial\theta}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}+(1-\sigma)u\right\}=N_1-aX(\theta,\varphi),\\
&\frac{Et}{(1-\sigma^2)a}\left\{\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}+(1-\sigma)v\right\}=N_2-aY(\theta,\varphi),\\
&\frac{\partial N_1}{\partial\theta}+N_1\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+\frac{Et}{(1-\sigma^2)a}\{(1+\sigma)U-(1-\sigma^2)w\}=-aZ(\theta,\varphi),\\
&\frac{D}{a^3}\frac{\partial(\Delta w+2w)}{\partial\theta}=-\left(1+\frac{t^2}{6a^2}\right)N_1+\frac{t^2}{6a}X(\theta,\varphi),\\
&\frac{D}{a^3}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\Delta w+2w)}{\partial\varphi}=-\left(1+\frac{t^2}{6a^2}\right)N_2+\frac{t^2}{6a}Y(\theta,\varphi).
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Путем достаточно очевидных преобразований выводим из последней системы вспомогательную систему с тремя неизвестными U, V, w:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta U+2U=-(1-\sigma^2)[F_1(\theta,\varphi)+F_2(\theta,\varphi)],\\
&\Delta V+2V=F_3(\theta,\varphi),\\
&\Delta\Delta w+2\Delta w+c^2w=\frac{c^2}{1-\sigma}U+c^2F_1(\theta,\varphi)+2(1-\sigma^2)F_2(\theta,\varphi),
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

где $F_1(\theta, \varphi)$, $F_2(\theta, \varphi)$, $F_3(\theta, \varphi)$—известные функции нагрузки:

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(\theta, \varphi) = \frac{a^2}{Et} Z(\theta, \varphi),\\
&F_2(\theta, \varphi) = \frac{a^2}{Et}\left(\frac{\partial X}{\partial \theta} + X \operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right),\\
&F_3(\theta, \varphi) = -\frac{2(1+\sigma)}{1+\frac{t^2}{6a^2}}\,\frac{a^2}{Et}\left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} + Y \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

а

$$c^2 = 12(1-\sigma^2)\frac{a^2}{t^2}\left(1 + \frac{t^2}{6a^2}\right).$$

Данная вспомогательная система и является, повидимому, простейшей математической формулировкой задачи о деформации сферической оболочки с учетом всех обстоятельств, предусмотренных в теории A. Love.

Отметим, что система (7), имея более высокий порядок, чем исходная система (6), содержит в себе кроме интересующих нас решений также и лишние решения. Последние должны быть из рассмотрения исключены.

2. Однородная задача. Обратимся к случаю, когда нагрузка приложена лишь на границах оболочки (за каковые будем считать два параллельных круга). При этом $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, и мы имеем систему

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta U + 2U = 0,\\
&\Delta V + 2V = 0,\\
&\Delta\Delta w + 2w + c^2 w = \frac{c^2}{1-\sigma} U.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Коль скоро внешняя нагрузка на границах оболочки допускает разложение в ряды Фурье по углу φ, решения системы (9) могут быть взяты также в виде рядов Фурье. При этом, очевидно, достаточно рассмотреть лишь общие члены этих рядов:

$$\left.\begin{aligned}
&U = U_k \cos k\varphi,\\
&V = V_k \sin k\varphi,\\
&w = w_k \cos k\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где U_k, V_k, w_k—функции только θ.

Подставляя (10) в (9) и проинтегрировав получающуюся при этом систему дифференциальных уравнений, мы определим U_k, V_k и w_k следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
&U_k = (1-\sigma)(C_1 P_1^k + C_2 Q_1^k),\\
&V_k = -2C_3 P_1^k - 2C_4 Q_1^k,\\
&w_k = C_1 P_1^k + C_2 Q_1^k + C_5 P_m^k + C_6 Q_m^k + C_7 P_n^k + C_8 Q_n^k,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где символами P_l^k и Q_l^k обозначены сферические функции первого и второго рода, причем

$$m(m+1) = 1 + i\sqrt{c^2-1} \approx 1 + ic,$$

n—сопряженное с m комплексное число, $C_1, \ldots, C_8$—постоянные интегрирования. Имея (11), мы можем продолжить интегрирование и довести его до перемещений u и v [воспользовавшись для этого формулами (5)]. В результате мы получим

$$u = u_k \cos k\varphi,$$
$$v = v_k \sin k\varphi,$$

где u_k и v_k суть функции только θ.

$$u_k = -C_1 \frac{dP_1^k}{d\theta} - C_2 \frac{dQ_1^k}{d\theta} - \frac{k}{\sin\theta}(C_3 P_1^k + C_4 Q_1^k) - (1+\sigma)\left[C_5 \frac{1}{m(m+1)} \frac{dP_m^k}{d\theta} + \right.$$
$$\left. + C_6 \frac{1}{m(m+1)} \frac{dQ_m^k}{d\theta} + C_7 \frac{1}{n(n+1)} \frac{dP_n^k}{d\theta} + C_8 \frac{1}{n(n+1)} \frac{dQ_n^k}{d\theta} \right], \qquad (12)$$
$$v_k = \frac{k}{\sin\theta}(C_1 P_1^k + C_2 Q_1^k) + C_3 \frac{dP_1^k}{d\theta} + C_4 \frac{dQ_1^k}{d\theta} + (1+\sigma)\frac{k}{\sin\theta}\left[C_5 \frac{1}{m(m+1)} P_m^k + \right.$$
$$\left. + C_6 \frac{1}{m(m+1)} Q_m^k + C_7 \frac{1}{n(n+1)} P_n^k + C_8 \frac{1}{n(n+1)} Q_n^k \right].$$

В последних формулах уже исключены те лишние члены, о которых мы упоминали выше.

Однородная задача решена.

Заметим, что входящие в решение функции P_1^k и Q_1^k конечным образом выражаются через тригонометрические функции.

Что касается P_m^k, Q_m^k, P_n^k, Q_n^k, то для их определения уместно воспользоваться разложениями E. Hobson'a (1), которые в интересной для данной задачи области имеют хорошую сходимость, так что в многих случаях сохранение одного только первого члена в этих разложениях дает вполне достаточную точность.

Воспользовавшись этим обстоятельством, можно легко получить приближенные решения для случаев несимметричной нагрузки на оболочку, аналогичные известному приближенному решению J. Geckeler'a (2) для случая симметричной нагрузки.

3. Частные решения системы (7). Коль скоро функции нагрузки $F_1(\theta, \varphi)$, $F_2(\theta, \varphi)$, $F_3(\theta, \varphi)$ допускают разложение в ряды по сферическим функциям, частные решения системы (7) могут быть получены в свою очередь в виде разложений по сферическим функциям.

Коэффициенты в последних разложениях определяются через коэффициенты первых разложений очевидным образом, после подстановки всех разложений в систему (7).

Данный способ позволяет получать частные решения задач моментной теории сферических оболочек для достаточно широкого круга нагрузок и притом без особых затруднений.

4. Заключение. Изложенное выше решение рассматриваемой задачи отличается от предложенных ранее решений A. Havers'a (3), В. Соколовского (4) и Ю. Репмана (5) способом преобразования уравнений, который представляется наиболее естественным. Кроме того первый автор рассматривает только однородную задачу, а два последних автора дают решения в неудобной форме (в плохо сходящихся рядах).

Поступило
20 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Hobson, Proc. Roy. Soc., vol. 187 (A) (1897). [2] J. Geckeler, Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwes. (1926). [3] A. Havers, Ing. Arch., 4 (1935). [4] В. Соколовский, ДАН, XVI, № 1 (1937). [5] Ю. Репман, Сб. «Пластинки и оболочки» (1939).