Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 6

МЕХАНИКА

С. Г. МИХЛИН

ОБ ОДНОЙ ЧАСТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 10 I 1940)

В настоящей заметке мы дадим в конечном виде решение плоской задачи теории упругости для области B, представляющей собой бесконечную плоскость с конечным числом разрезов на действительной оси. Мы решим эту задачу для случая анизотропной среды. Предельный переход даст нам решение для среды изотропной.

Для простоты ограничимся случаем, когда на контуре области даны внешние силы. В этом случае задача сводится к определению двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z_1)$ $(z=x+iy,\ z_1=x+\frac{i}{k}y,\ k\neq 1)$, которые на контуре области удовлетворяют равенствам [1]

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}+\psi(z_1)+\overline{\psi(z_1)}=u,\\ &\psi(z_1)-\overline{\psi(z_1)}+k[\varphi(z)-\overline{\varphi(z)}]=-ikv.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Мы можем, не ограничивая общности, считать, что на каждом разрезе главный вектор внешних действующих сил равен нулю. Тогда u и v непрерывны на контуре, а $\varphi(z)$ и $\psi(z_1)$ однозначны.

Функции u и v определены на каждом разрезе с точностью до постоянного слагаемого. На одном из разрезов эти постоянные можно зафиксировать как угодно, и тогда на остальных они определяются из условия однозначности функций $\varphi(z)$ и $\psi(z_1)$.

Для области B известно решение задачи Дирихле [см., например, [2]] и, следовательно, известно ядро Шварца [3] $T(z;\zeta)$ $(z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta)$. Поместим начало координат вне разрезов и подберем мнимую часть $T(z,\zeta)$ так, чтобы она равнялась нулю при $z=0$.

На контуре области B $z_1=z$. Обозначим точку контура через ζ, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\zeta)+\overline{\varphi(\zeta)}+\psi(\zeta)+\overline{\psi(\zeta)}=u(\zeta),\\ &\psi(\zeta)+\overline{\psi(\zeta)}+k[\varphi(\zeta)-\overline{\varphi(\zeta)}]=-ikv(\zeta).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Умножая каждое из равенств (2) на $\frac{1}{4\pi}T(z;\zeta)\,ds$, $ds=|d\zeta|$. и интегрируя по контуру C области B, найдем

$$\varphi(z)+\psi(z)-\frac{1}{2}\left[\varphi(0)-\overline{\varphi(0)}\right]-\\ -\frac{1}{2}\left[\psi(0)-\overline{\psi(0)}\right]=\frac{1}{4\pi}\int_C u(\zeta)\,T(z;\zeta)\,ds=F_1(z), \tag{3}$$

$$\psi(z)+k\varphi(z)-\frac{1}{2}\left[\psi(0)+\overline{\psi(0)}\right]-\frac{k}{2}\left[\varphi(0)+\overline{\varphi(0)}\right]=$$
$$=-\frac{ik}{4\pi}\int_C v(\zeta)\,T(z;\zeta)\,ds=ikF_2(z). \qquad (4)$$

Постоянные, входящие в $u(\zeta)$ и $v(\zeta)$, определим так, чтобы $F_1(z)$ и $F_2(z)$ были однозначны в B. Тогда $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также будут однозначны. Такой подбор постоянных всегда возможен в силу теоремы единственности.

Положим $\varphi(0)=0$. Тогда из (3) и (4) найдем

$$\varphi(z)=\frac{1}{1-k}\left[F_1(z)-ikF_2(z)\right]-\frac{1}{1-k}\left[F_1(0)-ikF_2(0)\right],$$
$$\psi(z)=\frac{k}{1-k}\left[iF_2(z)-F_1(z)\right]+\frac{1}{1-k}\left[F_1(0)-ik^2F_2(0)\right]. \qquad (5)$$

Формулы (5) дают решение для анизотропной среды.

Фукция Эри для анизотропной среды определяется по формуле [1]

$$W=R\left[f(z)+f_1(z_1)\right], \qquad (6)$$

где

$$f(z)=2\int\varphi(z)\,dz, \qquad f_1(z_1)=2\int\psi(z_1)\,dz_1. \qquad (7)$$

Обозначим

$$\Phi_1(z)=\int F_1(z)\,dz, \qquad \Phi_2(z)=\int F_2(z)\,dz. \qquad (8)$$

Тогда из (5) найдем

$$f(z)+f_1(z_1)=2\left[\frac{\Phi_1(z)-k\Phi_1(z_1)}{1-k}-\right.$$
$$\left.-ik\,\frac{\Phi_2(z)-\Phi_2(z_1)}{1-k}+\frac{i}{k}F_1(0)\,y+ikF_2(0)\,x\right]. \qquad (9)$$

Полагая $k\to 1$, получим выражение функции Эри для случая изотропной среды

$$W=2R\left[\Phi_1(z)-y\left(i\Phi_1'(z)+\Phi_2'(z)\right)\right]=$$
$$=2R\left[\Phi_1(z)-y\left(iF_1(z)+F_2(z)\right)\right]. \qquad (10)$$

Формула (10) дает решение нашей задачи для изотропной среды. При составлении этой формулы принято во внимание, что числа $F_1(0)$ и $F_2(0)$—действительные.

Сейсмологический институт
Академия Наук СССР

Поступило
13 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 76 (1936). [2] М. Келдыш и Л. Седов, ДАН, XVI, № 1 (1937). [3] С. Г. Михлин. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 65 (1935).