Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 6

МАТЕМАТИКА

П. П. КОРОВКИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА СПРЯМЛЯЕМОМ КОНТУРЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 III 1940)

1° Пусть C—гладкий контур, точное определение которого будет дано ниже, и D—область, ограниченная контуром и содержащая бесконечно далекую точку.

Пусть $f(x)$—функция, регулярная в области D, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$ и не имеющая там нулей, причем $f(\infty)>0$.

Ортогональные полиномы:

$$P_n(x)=\frac{1}{\mu_n}x^n+a_1^{(n)}x^{n-1}+\ldots+a_n^{(n)}\quad(\mu_n>0)\tag{1}$$

однозначно определяются условиями:

$$\int_C |f(x)|^2\,|\delta'(x)|\,P_n(x)\,\overline{P_m(x)}\,d\sigma=\begin{cases}1 & (n=m),\\ 0 & (n\neq m),\end{cases}\tag{2}$$

где $\bar{a}$—комплексное число, сопряженное с a, $d\sigma$—элемент длины контура C и $z=\delta(x)$—функция, конформно преобразующая область D на область $|z|>1$, причем $\delta(\infty)=\infty$ и $\delta'(\infty)>0$. Пусть

$$x=\Psi(z)=\tau z+\tau_0+\frac{\tau_1}{z}+\ldots\;(\tau>0)$$

—обратная функция. Мы считаем контур C таким, что $\Psi'(z)$ непрерывна вплоть до $|z|=1$ и что $\Psi'(e^{i\theta})$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha>\frac{1}{2}$.

Из (1) и (2) получаем:

$$1=\int_C |f(x)|^2\,|\delta'(x)|\left|\frac{P_n(x)}{\delta^n(x)}\right|^2 d\sigma=\int_0^{2\pi}\left|f[\Psi(z)]\,\frac{P_n[\Psi(z)]}{z^n}\right|^2 d\theta\geqslant 2\pi f^2(\infty)\frac{\tau^{2n}}{\mu_n^2}.$$

Следовательно, имеем:

$$\mu_n^2\geqslant 2\pi f^2(\infty)\,\tau^{2n}.\tag{3}$$

2° Пусть

$$x_k^{(n)}=\Psi\left(Re^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)\quad(k=0,1\ldots n-1,\;R>1).$$

Положим:

$$\omega_n^{(R)}(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k^{(n)})+\tau^n R^n$$

и

$$\omega_n(x)=\lim_{R\to\infty}\omega_n^{(R)}(x)=x^n+b_1^{(n)}x^{n-1}+\ldots+b_n^{(n)}.$$

Нетрудно показать, что полиномы $\omega_n(x)$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$\omega_n(x)=\tau^n[\delta^n(x)+\alpha_n(x)]\quad(|\delta(x)|\geqslant 1), \tag{4}$$

где $\alpha_n(x)$ равномерно стремится к нулю при $n\to\infty$ в $\overline{D}$.

Если C—аналитический контур и функция $\Psi(z)$ регулярна и однолистна в области $|z|>\rho$, то (4) имеет место в области $D_\rho\,(|\delta(x)|>\rho)$ и в любой области $|\delta(x)|\geqslant r_1>\rho$

$$|\alpha_n(x)|=O(r^n)\quad(r>\rho). \tag{5}$$

Пусть

$$\frac{1}{f(x)}=a_0+\frac{a_1}{\delta(x)}+\frac{a_2}{\delta^2(x)}+\ldots$$

Положим:

$$\omega_n(f;x)=\frac{1}{a_0}[a_0\omega_n(x)+a_1\tau\omega_{n-1}(x)+\ldots+a_n\tau^n].$$

В силу (4), получаем:

$$\omega_n(f;x)=\frac{\tau^n}{a_0}\left[\frac{\delta^n(x)}{f(x)}+\varepsilon_n(x)\right]. \tag{6}$$

где

$$\varepsilon_n(x)=\left[a_0\alpha_n(x)+a_1\alpha_{n-1}(x)+\ldots+a_{n-1}\alpha_1(x)-\frac{a_{n+1}}{\delta(x)}-\frac{a_{n+2}}{\delta^2(x)}-\ldots\right]$$

и нетрудно показать, что

$$\int_C|f(x)\varepsilon_n(x)|^2|\delta'(x)|\,d\sigma\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty. \tag{7}$$

Если C—аналитический контур и $f(x)$ принадлежит классу $Lip\,\alpha\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$ на контуре C, то $\varepsilon_n(x)$ равномерно стремится к нулю в $\overline{D}$ и

$$\int_C|f(x)\varepsilon_n(x)|^2|\delta'(x)|\,d\sigma=O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right). \tag{8}$$

Если $\frac{1}{f(x)}$ регулярна в области $|\delta(x)|>r$ $(1>r\geqslant\rho)$, то (6) имеет место в этой области и при $|\delta(x)|\geqslant r_1>r$:

$$|\varepsilon_n(x)|=O(r_1^n)\quad(r_1>r). \tag{9}$$

Далее находим:

$$\int_C|f(x)\omega_n(f;x)|^2|\delta'(x)|\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\frac{\tau^{2n}}{a_0^2}|z^n+f[\Psi(z)]\varepsilon_n[\Psi(z)]|^2\,d\theta=$$

$$=\frac{\tau^{2n}}{a_0^2}\left(2\pi+\int_0^{2\pi}|f[\Psi(z)]\varepsilon_n[\Psi(z)]|^2\,d\theta\right)=$$

$$=\tau^{2n}f^2(\infty)\left(2\pi+\int_0^{2\pi}|f[\Psi(z)]\varepsilon_n[\Psi(z)]|^2\,d\theta\right). \tag{10}$$

3° Положим:

$$\frac{1}{\tau^n}\omega_n(f;x)=\frac{\mu_n}{\tau^n}P_n(x)+Q_n(x), \tag{11}$$

где $Q_n(x)$—полином, степень которого не выше $n-1$. Очевидно, имеем:

$$\frac{1}{\tau^{2n}}\int\limits_C |f(x)\,\omega_n(f;x)|^2\,|\delta'(x)|\,d\sigma=\frac{\mu_n^2}{\tau^{2n}}+\int\limits_C |f(x)\,Q_n(x)|^2\,|\delta'(x)|\,d\sigma. \quad (12)$$

Из (3), (10) и (12) следует:

$$\int\limits_C |f(x)|^2\,|Q_n(x)|^2\,|\delta'(x)|\,d\sigma\leqslant f^2(\infty)\int\limits_0^{2\pi}|f[\Psi(z)]\,\varepsilon_n[\Psi(z)]|^2\,d\theta \qquad (z=e^{i\theta}) \quad (13)$$

и

$$\mu_n\sim\sqrt{2\pi}\,f(\infty)\,\tau^n. \quad (14)$$

Применяя к функции $\left\{f(x)\frac{Q_n(x)}{\delta^n(x)}\right\}^2$, регулярной в области D и равной нулю в бесконечно далекой точке, формулу Коши, получим:

$$\left\{f(\xi)\frac{Q_n(\xi)}{\delta^n(\xi)}\right\}^2=\int\limits_C\frac{\left\{f(x)\dfrac{Q_n(x)}{\delta^n(x)}\right\}^2}{x-\xi}\,dx=\int\limits_C\frac{\left\{\dfrac{f(x)\,Q_n(x)\sqrt{\delta'(x)}}{\delta^n(x)}\right\}^2}{\delta(x)-\delta(\xi)}\,d\sigma. \quad (15)$$

Отсюда следует:

$$\left|f(\xi)\frac{Q_n(\xi)}{\delta^n(\xi)}\right|^2\leqslant\frac{1}{-1+|\delta(\xi)|}\int\limits_C |f(x)\,Q_n(x)|^2\,|\delta'(x)|\,d\sigma. \quad (16)$$

Сравнивая (7), (13) и (16), заключаем, что в области D

$$|Q_n(x)|=o(1)\,|\delta^n(x)|.$$

Следовательно, в области D

$$\frac{P_n(x)}{\delta^n(x)}\sim\frac{1}{\mu_n}\,\frac{\omega_n(f;x)}{\delta^n(x)}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,f(x)}. \quad (17)$$

Замечание 1. Формула (17) получена Szegö для аналитического контура.

Замечание 2. Формула (17) справедлива, если $f(x)$ регулярна в области D и интегралы:

$$\int\limits_{|\delta(x)|=r>1}|f(x)|^2\,d\sigma$$

остаются ограничены для $r\to 1$.

4° Пусть C—аналитический контур, причем $\Psi(z)$, как и выше, регулярна и однолистна при $|z|>\rho$, и $\frac{1}{f(x)}$ принадлежит классу $Lip\,\alpha\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$. В этом случае из (8), (13) и (16) следует:

$$|Q_n(x)|=\sqrt{\frac{O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)|\delta^n(x)|}{|\delta(x)|-1}}.$$

Полагая $|\delta(x)|=1+\frac{1}{n}$, убедимся, что $Q_n(x)\to 0$ равномерно на кривой $|\delta(x)|=1+\frac{1}{n}$, а следовательно, $Q_n(x)\to 0$ равномерно на кривой C. Поэтому

$$P_n(x)\sim\frac{1}{\mu_n}\,\omega_n(f;x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta^n(x)}{f(x)},\ (|\delta(x)|\geqslant 1). \quad (18)$$

Если теперь $\frac{1}{f(x)}$ регулярна в области D_r ($|\delta(x)| > r$), где $1 > r \geqslant \rho$, то из (9), (13) и (16) получаем:

$$|Q_n(x)| = O(r_2^n) \quad \left(|\delta(x)| = \frac{r_2}{r_1} > 1\right); \tag{19}$$

так как $r_2 > r$ произвольно, то получаем:

$$P_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta^n(x)}{f(x)} \quad (|\delta(x)| > r \geqslant \rho). \tag{20}$$

Замечание. После защиты диссертации, в которой мною получена формула (20), я нашел в книге Szegö «Об ортогональных полиномах», появившейся в Москве в декабре 1939 г., формулу (20), доказанную для области $|\delta(x)| > \sqrt{r}$.

Настоящая статья представляет часть моей кандидатской диссертации, выполненной под руководством проф. В. И. Смирнова.

Пользуясь случаем, выражаю ему мою глубокую благодарность.

Педагогический институт
Калинин

Поступило
20 III 1940