Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Я. ЛЮБОВ

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТИ С РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 II 1947)

Для решения некоторых технических вопросов необходимо определение нестационарных температурных полей в областях, границы которых меняются заданным образом во времени. В настоящей заметке излагается решение этой задачи в одномерном случае ($0\leqslant x\leqslant ct$ и $x\geqslant ct$, где $c=\text{const}$).

Математически задача формулируется следующим образом: найти функцию $T(x,t)$, удовлетворяющую в области $0<x<ct$ уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

и краевым условиям

$$T(x,t)=\varphi(t) \text{ при } x=0, \quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

$$T(x,t)=\psi(t) \text{ при } x=ct, \quad t\geqslant 0; \tag{3}$$

$$\varphi(0)=\psi(0)=0.$$

При $t=0$ рассматриваемая область изменения x сосредоточена в точке $x=0$ и имеет температуру, равную нулю.

Будем искать решение в виде:

$$T(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^t\left[\mu(\eta)e^{-\frac{(z-\beta\eta)^2}{t-\eta}}+\lambda(\eta)e^{-\frac{z^2}{t-\eta}}\right]\frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}}, \tag{4}$$

где $\mu(\eta)$, $\lambda(\eta)$ определяются краевыми условиями задачи.

Здесь приняты обозначения:

$$z=\frac{x}{2\sqrt{a}}, \qquad \beta=\frac{c}{2\sqrt{a}}.$$

Из краевых условий (2), (3) следует

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^t\left[\mu(\eta)e^{-\frac{\beta^2\eta^2}{t-\eta}}+\lambda(\eta)\right]\frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}}=\varphi(t), \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^t\left[\mu(\eta)e^{-\beta^2(t-\eta)}+\lambda(\eta)e^{-\frac{\beta^2t^2}{t-\eta}}\right]\frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}}=\psi(t). \tag{6}$$

2*

Введем функции

$$\mu_0(\eta)=\mu(\eta)\, e^{\beta^2\eta}, \tag{7}$$

$$\psi_0(t)=\psi(t)\, e^{\beta^2 t}. \tag{8}$$

Система интегральных уравнений (5), (6) приводится к симметричному виду:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^t\left[\mu_0(\eta)\, e^{-\beta^2\frac{t\eta}{t-\eta}}+\lambda(\eta)\right]\frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}}=\varphi(t), \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_0^t\left[\mu_0(\eta)+\lambda(\eta)\, e^{-\beta^2\frac{t\eta}{t-\eta}}\right]\frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}}=\psi_0(t). \tag{10}$$

Применим к (9) интегральное преобразование Лапласа — Карсона $p\int\limits_0^\infty e^{-pt}\ldots dt.$

$$\frac{p}{\sqrt{\pi a}}\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^t\left[\mu_0(\eta)\, e^{-\beta^2\frac{t\eta}{t-\eta}}+\lambda(\eta)\right]\frac{d\eta\, dt}{\sqrt{t-\eta}}=$$

$$=\sqrt{\frac{p}{a}}\left[\int_0^\infty e^{-(\sqrt{p}+\beta)^2\eta}\,\mu_0(\eta)\,d\eta+\int_0^\infty e^{-pt}\lambda(\eta)\,d\eta\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{p}{a}}\,\frac{\overline{\mu}_0\left[(\sqrt{p}+\beta)^2\right]}{(\sqrt{p}+\beta)^2}+\frac{\overline{\lambda}(p)}{\sqrt{ap}}=\overline{\varphi}(p). \tag{11}$$

Изображение функции представляется ее символом с чертой сверху. Здесь, разумеется, принимается, что все рассматриваемые функции имеют изображения.

После аналогичного преобразования выражения (10) получаем для определения изображений $\overline{\mu}_0(p)$, $\overline{\lambda}(p)$ систему функциональных уравнений

$$\frac{\overline{\mu}_0\left[(\sqrt{p}+\beta)^2\right]}{(\sqrt{p}+\beta)^2}+\frac{\overline{\lambda}(p)}{p}=\sqrt{\frac{a}{p}}\,\overline{\varphi}(p), \tag{12}$$

$$\frac{\overline{\mu}_0(p)}{p}+\frac{\overline{\lambda}\left[(\sqrt{p}+\beta)^2\right]}{(\sqrt{p}+\beta)^2}=\sqrt{\frac{a}{p}}\,\overline{\psi}_0(p). \tag{13}$$

Исключив $\overline{\mu}_0(p)$, найдем

$$\frac{\overline{\lambda}(p)}{p}-\frac{\overline{\lambda}\left[(\sqrt{p}+2\beta)^2\right]}{(\sqrt{p}+2\beta)^2}=\sqrt{\frac{a}{p}}\,\overline{\varphi}(p)-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{p}+\beta}\,\overline{\psi}_0\left[(\sqrt{p}+\beta)^2\right]. \tag{14}$$

Если ввести обозначения

$$\frac{\overline{\lambda}(p^2)}{p^2}=\frac{\overline{F}(p)}{p},\quad \overline{\varphi}(p^2)=\overline{f}_1(p),\quad \overline{\psi}_0(p^2)=\overline{f}_2(p),$$

то

$$\overline{F}(p)-\frac{p}{p+2\beta}\overline{F}(p+2\beta)=\sqrt{a}\left[\overline{f}_1(p)-\frac{p}{p+\beta}\overline{f}_2(p+\beta)\right]. \tag{15}$$

Из операционного исчисления известно, что если

$$\overline{\varphi}(t)\leftarrow\!\!\!\div\;\overline{\varphi}(p),$$

то

$$e^{-\gamma t}\varphi(t) \leftarrow \frac{p}{p+\gamma}\bar{\varphi}(p+\gamma) \text{ при } \gamma = \mathrm{const}$$

($\leftarrow$ знак операционного соответствия).

Таким образом, оригинал (15) имеет вид:

$$F(t)(1-e^{-2\beta t}) = \sqrt{a}\,[f_1(t) - e^{-\beta t} f_2(t)]. \tag{16}$$

Отсюда

$$F(t) = \sqrt{a}\sum_{k=0}^{\infty}[f_1(t)\,e^{-2k\beta t} - f_2(t)\,e^{-(2k+1)\beta t}], \tag{17}$$

$$\frac{\bar{F}(p)}{p} = \sqrt{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\bar{f}_1(p+2k\beta)}{p+2k\beta} - \frac{\bar{f}_2(p+\overline{2k+1}\,\beta)}{p+\overline{2k+1}\,\beta}\right] \tag{18}$$

или

$$\bar{\lambda}(p) = \sqrt{a}\,p\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\bar{\varphi}[(\sqrt{p}+2k\beta)^2]}{\sqrt{p}+2k\beta} - \frac{\bar{\psi}_0[(\sqrt{p}+\overline{2k+1}\,\beta)^2]}{\sqrt{p}+\overline{2k+1}\,\beta}\right\}. \tag{19}$$

Из (13) следует

$$\bar{\mu}_0(p) = \sqrt{pa}\,\bar{\psi}_0(p) - \sqrt{a}p\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\bar{\varphi}[(\sqrt{p}+\overline{2k+1}\,\beta)^2]}{\sqrt{p}+\overline{2k+1}\,\beta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{\psi}_0[(\sqrt{p}+\overline{2k+2}\,\beta)^2]}{\sqrt{p}+\overline{2k+2}\,\beta}\right\}. \tag{20}$$

Известно, что

$$v(p)\,\bar{\varphi}\,[q(p)] \doteq \int_0^{\infty} w(\xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{21}$$

где

$$w(\xi, t) \leftarrow e^{-\xi q(p)}\,q(p)\,v(p).$$

Применяя (21) к (19), (20), получим

$$\lambda(t) = \sqrt{a}\int_0^t\left[\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}(\xi, t)\,\varphi(\xi) - \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k+1}(\xi, t)\,e^{\beta^2\xi}\,\psi(\xi)\right]d\xi, \tag{22}$$

$$\mu(t) = \sqrt{a}\int_0^t\left[\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k+2}(\xi, t)\,e^{-\beta^2(t-\xi)}\,\psi(\xi) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k+1}(\xi, t)\,e^{-\beta^2 t}\,\varphi(\xi)\right]d\xi -$$

$$-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\psi(\xi)\,e^{-\beta^2(t-\xi)}}{(t-\xi)^{3/2}}\,d\xi, \tag{23}$$

где

$$v_\alpha(\xi, t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < \xi, & (24)\\ \left[\dfrac{\alpha^2\beta^2\xi^2}{(t-\xi)^{5/2}} + \dfrac{\alpha^2\beta^2\xi}{(t-\xi)^{3/2}} - \dfrac{1}{2(t-\xi)^{3/2}}\right]\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{\alpha^2\beta^2\xi^2}{t-\xi} - \alpha^2\beta^2\xi} \text{ при } t > \xi. \end{cases}$$

Зная $\lambda(t)$, $\mu(t)$, определим искомое температурное поле по формуле (4).

Переходя к области $x \geqslant ct$, нужно сохранить краевое условие (3), а вместо (2) потребовать

$$\lim_{x \to \infty} T(x, t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{25}$$

Начальное условие примем нулевым, так как это не уменьшает общности решения задачи [1], упрощая выкладки.

Если

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \int_0^t \frac{\omega(\eta)}{\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{(z-\beta\eta)^2}{t-\eta}} d\eta, \tag{26}$$

начальное условие и краевое условие (25) удовлетворяются.

Условие (3) дает

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^t \frac{\omega(\eta)}{\sqrt{t-\eta}} e^{-\beta^2(t-\eta)} d\eta = \psi(t). \tag{27}$$

В изображении

$$\frac{\overline{\omega}(p)}{\sqrt{a(p+\beta^2)}} = \overline{\psi}(p), \tag{28}$$

отсюда

$$\overline{\omega}(p) = \sqrt{a(p+\beta^2)}\, \overline{\psi}(p). \tag{29}$$

По известной теореме Бореля находим

$$\omega(t) = \sqrt{a} \frac{d}{dt} \int_0^t \psi(t-\xi) \left[\beta \operatorname{erf}(\beta \sqrt{\xi}) + \frac{e^{-\beta^2\xi}}{\sqrt{\pi\xi}} \right] d\xi, \qquad (30$$

так как

$$\sqrt{p+\beta^2} \div \beta \operatorname{erf}(\beta\sqrt{t}) + \frac{e^{-\beta^2 t}}{\sqrt{\pi t}}, \qquad \operatorname{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\xi^2} d\xi.$$

Подстановка (30) в (26) дает решение задачи.

В заключение отметим, что изложенное решение может быть применено к рассмотрению подобных нестационарных температурных полей в области сферической симметрии.

Применение аналогичных методов для решения этой же задачи в области цилиндрической симметрии, а также конкретные решения при краевых условиях первого, второго и третьего рода будут нами разобраны в другом месте.

Поступило
23 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Мюнтц, Интегральные уравнения, 1934.