Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. Г. ФРЕЙДИНА

ДВОЙСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ ГРУППУ ДВИЖЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 III 1947)

1. Двойственные системы — название, предложенное П. К. Рашевским для созданных им геометрических систем (1), осуществляющих принцип метрической двойственности. Двойственная система строится в обобщенном (в смысле Картана) пространстве „линейных элементов" (x^1, x^2, x^3). В основе ее лежат две линейные метрические формы $ds_1 = \overset{1}{\omega}_i dx^i$, $ds_2 = \overset{2}{\omega}_i dx^i$, измеряющие два вида расстояний вдоль любой „кривой" $\overset{0}{\omega}_i dx^i = 0$. Характерное свойство такой геометрической системы, определяющее ее „двойственный" характер, заключается во взаимной сопряженности метрик ds_1, ds_2; именно в том, что угловая метрика $d\theta$ одной (каждой) из них конформна другой:

$$d\theta_1 = \sqrt{\underset{2}{K}}\, ds_2, \tag{1}$$

$$d\theta_2 = \sqrt{\underset{1}{K}}\, ds_1, \tag{2}$$

где функции $\underset{1}{K}(x^i)$, $\underset{2}{K}(x^i)$ постоянны вдоль нулевой линии соответствующей метрики, что выражается условиями $\underset{1}{X}\underset{2}{K} = 0$, $\underset{2}{X}\underset{1}{K} = 0$ $\Big(\underset{1}{X}$, $\underset{2}{X}$ — линейные дифференциальные операторы: $\underset{i}{X} = \underset{i}{\xi^j} \frac{\partial}{\partial x^j}$, причем $\| \underset{i}{\xi^j} \|$ есть матрица, взаимная $\| \overset{i}{\omega}_j \| \Big)$. Условия (1), (2) можно формулировать таким образом: в двойственной системе нулевые линии одной метрики служат геодезическими для другой.

Для того чтобы биметрическая система ds_1, ds_2 была в указанном смысле двойственной, необходимо и достаточно, чтобы определяющие ее тензоры $\overset{i}{\omega}_j$ (нормированные) удовлетворяли следующей системе „уравнений структуры":

$$\overset{1}{\omega}{}' = -\underset{2}{K}\overset{02}{[\omega\omega]}; \quad \overset{2}{\omega}{}' = \underset{1}{K}\overset{01}{[\omega\omega]}; \quad \overset{0}{\omega}{}' = \overset{12}{[\omega\omega]}; \quad \left(\overset{k}{\omega}{}' \equiv \frac{\partial \overset{k}{\omega}_{i}}{\partial x^{i}}\Big|_{[i,j]},\ \overset{kl}{[\omega\omega]} \equiv \overset{k}{\omega}_{[i}\overset{l}{\omega}_{j]}\right) \tag{3}$$

Здесь $\underset{1}{K}$, $\underset{2}{K}$ — основные инварианты двойственной системы, фигурирующие в формулах (1), (2).

Если отобразить пространство (x^1, x^2, x^3) на евклидову плоскость $(x, y, z = dy/dx)$ так, чтобы нулевые линии одной из двух метрик ds_i совпали с точками, то эта метрика примет финслерову форму и, в частности, ds^2 сводится к гауссовой квадратичной форме, когда одна из „кривизн“ $\underset{i}{K}$ обращается в константу (положительную). Таким образом, двойственные системы реализуются, в частном случае, в виде гауссовой геометрии на поверхности. Для двойственных же систем общего вида — при $\underset{1}{K}$, $\underset{2}{K} \neq \mathrm{const}$ — имеется только доказанная П. К. Рашевским теорема существования.

Настоящее сообщение содержит результаты работы, имевшей целью разыскать определенный класс нетривиальных двойственных систем, т. е. найти их конкретное представление, и изучить затем их геометрические свойства.

2. Прежде всего мы, в предположении, что нетривиальные двойственные системы, допускающие группу движений, существуют, выясняем, что группа эта может быть только одночленной. Перейдя в каноническую систему координат (в которой нулевые линии первой метрики обращаются в „точки“ и, вместе с тем, оператор группы принимает каноническую форму $Y = \partial/\partial x^3$), получаем определяющие уравнения структуры в следующем виде:

$$\partial\overset{1}{\omega}_3/\partial x^1 = 0; \quad \partial\overset{1}{\omega}_3/\partial x^2 = -\underset{2}{K}\,\overset{0}{\omega}_3\overset{2}{\omega}_2; \quad \partial\overset{1}{\omega}_1/\partial x^2 = -\underset{2}{K}\,\overset{0}{\omega}_1\overset{2}{\omega}_2; \tag{I}$$

$$\partial\overset{2}{\omega}_3/\partial x^1 = \underset{1}{K}\,\overset{0}{\omega}_{[3}\omega_{1]}; \quad \partial\overset{2}{\omega}_3/\partial x^2 = 0; \quad \partial\overset{2}{\omega}_1/\partial x^2 - \partial\overset{2}{\omega}_2/\partial x^1 = 0; \tag{II}$$

$$\partial\overset{0}{\omega}_3/\partial x^1 = \overset{1}{\omega}_{[3}\omega_{1]}; \quad \partial\overset{0}{\omega}_3/\partial x^2 = \overset{1}{\omega}_3\overset{2}{\omega}_2; \quad \partial\overset{0}{\omega}_1/\partial x^2 = \overset{1}{\omega}_1\overset{2}{\omega}_2 \tag{III}$$

(здесь $\underset{1}{K}$ и $\underset{2}{K}$ — произвольные функции от x^1 и x^2, соответственно) при дополнительных условиях: а) $\partial\overset{i}{\omega}_j/\partial x^3 = 0$, б) $\overset{0}{\omega}_2 = \overset{1}{\omega}_2 = 0$,

$$\overset{0}{\omega}_{[1}\overset{2}{\omega}_{3]} = 0, \tag{1}$$

причем условие 1) является характеристическим для искомого класса двойственных систем.

Проинтегрировав смешанную систему уравнений (I), (II), (III), (1), находим общее выражение для форм $\overset{k}{\omega}$ и, следовательно, общий вид искомых систем:

$$ds_1 = \frac{dx^1}{\underset{1}{K}\sqrt{a+b}}, \; ds_2 = \frac{dx^2}{\underset{2}{K}\sqrt{a+b}}, \; \frac{1}{\sqrt{a+b}}\overset{0}{\omega} \equiv \int\limits_{x_0^2}^{x^2} \frac{dx^2}{\underset{1}{K}\underset{2}{K}(a+b)^{3/2}}\, dx^1 - dx^3 = 0, \tag{2}$$

где

$$a = -2\int \frac{x^1}{\underset{1}{K}(x^1)}\, dx^1, \qquad b = -2\int \frac{x^2}{\underset{2}{K}(x^2)}\, dx^2. \tag{3}$$

Приняв за независимые переменные параметры a, b и введя две новых произвольных функции $A(a)$, $B(b)$ $(A' = -4\underset{1}{K},\; B' = -4\underset{2}{K})$, получаем простое и вполне симметричное *общее представление двойственных систем, допускающих группу движений* (в канонических координатах первой метрики):

$$ds_1 = \frac{da}{\sqrt{A}\sqrt{a+b}}, \qquad ds_2 = \frac{db}{\sqrt{B}\sqrt{a+b}}, \tag{4}$$

вдоль любой „кривой“

$$\int\limits_{b_0}^{b} \frac{db}{\sqrt{AB}\,(a+b)^{3/2}}\; da - dx^3 = 0. \tag{5}$$

Мы видим, что такая система определяется заданием двух функций, от одного аргумента каждая.

Очевидно, нулевые линии второй метрики и, значит, геодезические первой метрики характеризуются здесь условием $b=\text{const}$. Следовательно, учитывая „условие примыкания" (5), получим *уравнение геодезических линий первой метрики:*

$$x^3=\int_{a_0}^{a}\int_{b_0}^{b}\frac{db\,da}{\sqrt{AB}\,(a+b)^{3/2}}+c,\quad b \text{ фиксировано.} \tag{6}$$

Легко перейти к каноническим координатам второй метрики (достаточно выполнить преобразование переменной x^3). Выражения ds_1, ds_2 останутся прежними; несколько изменится лишь условие примыкания и, соответственно, *уравнение геодезических второй метрики получим в виде:*

$$\bar{x}^3=\int_{b_0}^{b}\int_{a_0}^{a}\frac{da\,db}{\sqrt{AB}\,(a+b)^{3/2}}+\bar{c},\quad a \text{ фиксировано.} \tag{7}$$

Мы можем отобразить трехмерное многообразие (a, b, x^3) на многообразие линейных элементов евклидовой плоскости так, чтобы нулевые линии первой метрики совпали с точками плоскости. Для этого полагаем:

$$a=x,\ x^3=y,\quad \int_{b_0}^{b}\frac{db}{\sqrt{AB}\,(x+b)^{3/2}}=z. \tag{8}$$

Тогда траектории движения будут представлять собой одномерные многообразия линейных элементов, определяемых уравнениями $x=\text{const}$, $z=\text{const}$, а система геодезических разбивается на однопараметренные семейства кривых, остающиеся инвариантными при движении. Далее выясняем, что, в согласии с общей теорией, *наше множество двойственных систем* (4), (5) — будем, для краткости, называть их системами вращения — *включает в себе класс поверхностей, наложимых на поверхности вращения,* именно, когда B — линейная функция от b (что соответствует $\underset{2}{K}=\text{const}$). При этом каждой такой поверхности соответствует содержащее ее множество систем вращения (определяемое заданием одной лишь функции $A(a)$ при произвольной $B(b)$), отобразимых друг на друга с сохранением площадей. Действительно, площадь некоторой области D на плоскости для всех систем вращения (включая и поверхности) выражается формулой:

$$\sigma=\iint_D\frac{dx}{\sqrt{A(x)}}\,dy. \tag{9}$$

Обращаясь к уравнению геодезических (6), замечаем, что оно остается инвариантным при подстановке $\bar{a}=\frac{-1}{k+a}$, $\bar{b}=\frac{1}{k-b}$, где k — константа (достаточно большая по модулю). Если обозначить $\bar{A}(\bar{a})=\frac{A(a)}{k+a}$, $\bar{B}(\bar{b})=\frac{B(b)}{k-b}$, уравнение (6) представится в виде

$$x^3=\iint\frac{d\bar{a}\,d\bar{b}}{\sqrt{\bar{A}\bar{B}}\,(\bar{a}+\bar{b})^{3/2}}+c,\qquad \bar{b} \text{ фиксировано.} \tag{6a}$$

Значит, кривые семейства (6а) или, что то же, (6) являются геодезическими линиями не только системы (4), но также и некоторой системы

$$d\bar{s}_1=\frac{d\bar{a}}{\sqrt{\bar{A}}\sqrt{\bar{a}+\bar{b}}},\quad d\bar{s}_2=\frac{d\bar{b}}{\sqrt{\bar{B}}\sqrt{\bar{a}+\bar{b}}},\tag{10}$$

существенно отличной от системы (4):

$$d\bar{s}_1=\frac{\sqrt{k-b}}{k+a}\,ds_1,\quad d\bar{s}_2=\frac{\sqrt{k+a}}{k-b}\,ds_2\,.\tag{11}$$

Таким образом, все *множество систем вращения разбивается на классы* ∞^1 *систем* (т. е. систем, зависящих от одного параметра k), *геодезически отобразимых друг на друга.* При этом разбиении поверхности вращения обособляются от нетривиальных систем вращения, т. е. поверхность не может быть геодезически отображена на нетривиальную двойственную систему* (так как линейной функции $B(b)$ соответствует линейная же функция $\bar{B}(\bar{b})$).

Интересный пример нетривиальной системы вращения получаем, полагая $A(a)=1/a^2$, $B(b)=1/b^2$. При отображении на плоскость по формулам (8) первая метрика принимает следующую (финслерову) форму:

$$ds_1=-\frac{1}{2x}(z+\sqrt{z^2-4x^3})\,dx\,.\tag{12}$$

Ее геодезические являются алгебраическими кривыми — конечное уравнение их имеет вид:

$$y=-\frac{4}{5}\sqrt{x+b}\,(2x^2-bx+2b^2)+c\,,\tag{13}$$

где b, c — произвольные параметры (c — параметр группы).

Наконец, мы устанавливаем инвариантную характеристику систем вращения. *Для того чтобы двойственная система допускала группу движений, необходимо и достаточно, чтобы ее производные инварианты* $\underset{1}{X}\underset{1}{K}$, $\underset{2}{X}\underset{2}{K}$ ($\underset{1}{X}$, $\underset{2}{X}$ — основные операторы данной системы) *были некоторыми функциями основных ее инвариантов*

$$\underset{1}{X}\underset{1}{K}=I(\underset{1}{K},\underset{2}{K}),\quad \underset{2}{X}\underset{2}{K}=J(\underset{1}{K},\underset{2}{K}).$$

Этот признак можно записать в инвариантной (и вполне эффективной) форме:

$$\underset{1}{X}\underset{2}{X}\ln I+\underset{2}{X}\ln I\cdot\underset{1}{X}\ln J\equiv0,\quad \underset{2}{X}\underset{1}{X}\ln J-\underset{1}{X}\ln J\cdot\underset{2}{X}\ln I\equiv0.\tag{14}$$

Функции I, J, разумеется, не могут быть вполне произвольными — они должны удовлетворять уравнениям структуры. Вследствие этого получаем:

$$I^2=2e^{2\alpha}\int Be^{-2\beta}d\underset{2}{K},\quad J^2=3e^{2\beta}\int Ae^{-2\alpha}d\underset{1}{K}\tag{15}$$

где $\alpha(\underset{1}{K})$, $\beta(\underset{2}{K})$ — произвольные функции от $\underset{1}{K}$, $\underset{2}{K}$, соответственно, а функции $A(\underset{1}{K})$, $B(\underset{2}{K})$ определяются из уравнений:

$$A'-\alpha A-\underset{1}{K}=0,\quad B'-\beta' B+\underset{2}{K}=0.\tag{16}$$

Отсюда, между прочим, снова видно, что *системы вращения определяются произвольным заданием двух функций, от одного аргумента каждая.*

Поступило
18 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. К. Рашевский, Тр. семинара по тензорному анализу, 5 (1941).

* Это утверждение может быть полностью доказано при рассмотрении общей проблемы геодезического отображения двойственных систем.