Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

МЕТРИКА И АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ПЛОСКОСТЕЙ, СФЕР И КВАДРИК

(Представлено академиком И. Г. Петровским 18 II 1947)

Очень многие геометрические образы, в том числе точки, плоскости, сферы и квадрики в различных пространствах, можно рассматривать с общей точки зрения как „образы симметрии".

Будем рассматривать следующие действительные пространства: проективное n-пространство P_n, евклидово n-пространство R_n, l-псевдоевклидовы n-пространства ${}^lR_n$ (с неопределенной основной формой индекса l), эллиптическое n-пространство S_n и l-псевдоэллиптические n-пространства ${}^lS_n$ (n-сферы, соответственно, в R_{n+1} и ${}^lR_{n+1}$ с отождествленными диаметрально противоположными точками; ${}^1S_n$ — гиперболическое n-пространство), конформное n-пространство C_n (R_n, дополненное несобственной точкой) и, кроме того, комплексное унитарно-эллиптическое n-пространство K_n ((1), стр. 242) и двойное унитарно-эллиптическое n-пространство B_n (отличающееся от K_n тем, что в нем комплексные числа заменены на двойные числа Клиффорда $\alpha = a + \omega b$, $\omega^2 = \pm 1$). Основные группы этих пространств мы будем обозначать, соответственно, $\mathfrak{P}_n$ (проективные преобразования), $\mathfrak{R}_n$ (евклидовы движения), ${}^l\mathfrak{R}_n$ (движения ${}^lR_n$), $\mathfrak{S}_n$ (эллиптические движения), ${}^l\mathfrak{S}_n$ (движения ${}^lS_n$), $\mathfrak{C}_n$ (конформные преобразования), $\mathfrak{K}_n$ (движения K_n) и $\mathfrak{B}_n$ (движения B_n). Все эти группы могут быть представлены матрицами.

В этих пространствах мы будем рассматривать следующие геометрические образы: m-пары P_n (конфигурации m-плоскость — $(n-m-1)$-плоскость), m-плоскости R_n, ${}^lR_n$, S_n, ${}^lS_n$, K_n и B_n; m-сферы C_n и гиперквадрики P_n (0-плоскости — точки, 0-сферы — пары точек, 0-пары — конфигурации точка — гиперплоскость). Полные многообразия этих образов мы будем называть, соответственно, пространствами P_n^m, R_n^m, ${}^lR_n^m$, S_n^m, ${}^lS_n^m$, K_n^m, B_n^m, C_n^m и Q_n^{n-1}.

Симметрия относительно m-плоскости в R_n, ${}^lR_n$, S_n, ${}^lS_n$ хорошо известна — это зеркальное отражение относительно m-плоскости по перпендикулярам (таковы в R_3 симметрии относительно точки, прямой и плоскости). Симметрия относительно m-плоскости в K_n и B_n определяется точно так же. Симметрия относительно m-сферы в C_n ставит в соответствие каждой точке C_n точку пересечения всех кругов, проходящих через каждую точку и ортогонально секущих данную m-сферу (такова в C_3 инверсия относительно шара и симметрии относительно круга и пары точек). Симметрия относительно m-пары в P_n ставит в соответствие каждой точке P_n ту точку прямой, проходящей через эту точку и пересекающей обе плоскости m-пары, которая является 4-й гармонической для данной точки и точек пересечения построенной прямой с плоскостями m-пары. Для определения симметрии относительно гиперквадрики P_n надо рассматривать не P_n, а P_n^0 (пространство 0-пар P_n) — искомая симметрия является поляритетом относительно гиперквадрики.

Построенные многообразия образов симметрии находятся в тесной связи друг с другом: пространства R_n^m, ${}^lR_n^m$, S_n^m, ${}^lS_n^m$ можно отобразить на подпространства пространства P_n^m, поставив в соответствие каждой m-плоскости m-пару, состоящую из данной m-плоскости и ее поляры (группы $\mathfrak{R}_n$, ${}^l\mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{S}_n$, ${}^l\mathfrak{S}_n$ — подгруппы группы $\mathfrak{P}_n$). Пространство C_n^m можно отобразить на пространство ${}^1S_{n+1}^{m+1}$, поставив в соответствие каждой точке C_n точку абсолюта ${}^1S_{n+1}$, а m-сфере — $(m+1)$-плоскость, высекающую из абсолюта образ этой m-сферы („перенесение Дарбу—Клейна", ([2]), стр. 197) (группы $\mathfrak{S}_n$ и ${}^1\mathfrak{S}_{n+1}$ изоморфны). Пространства P_n^0 и P_n^m можно отобразить соответственно, на пространства B_n и B_n^m (группы $\mathfrak{P}_n$ и $\mathfrak{B}_n$ изоморфны); гиперквадрики P_n при этом изображаются действительными n-плоскостями B_n. Пространства K_n и B_n можно отобразить на лучи конгруэнции параллелей Клиффорда, соответственно, в S_{2n+1} и ${}^{n+1}S_{2n+1}$, m-плоскости K_n и B_n при этом изображаются $(2m+1)$-плоскостями, состоящими из лучей конгруэнции, а действительные n-плоскости — n-плоскостями, ортогональными лучам конгруэнции (группы $\mathfrak{K}_n$ и $\mathfrak{B}_n$ изоморфны факторгруппам групп движений, допускаемых конгруэнциями, по подгруппе параллельных сдвигов вдоль их лучей)*.

Теорема 1. *Числовыми и геометрическими инвариантами двух образов симметрии являются инварианты того преобразования основной группы, которое является произведением симметрий относительно этих образов: элементы основного пространства, остающиеся неподвижными при этом преобразовании, и собственные числа матрицы этого преобразования.*

Для двух m-пар P_n $(m \leqslant n-m-1)$ в общем случае неподвижные точки соответственного проективного преобразования состоят из точек $(n-2m-2)$-плоскости (плоскость пересечения $(n-m-1)$-плоскостей m-пар) и $2m+2$ изолированных точек („направляющие точки" m-пар), а из собственных чисел матрицы этого преобразования $2m+2$ имеют вид $e^{i\omega_a}$, $e^{-i\omega_a}$ $(a=0,\ldots,m)$, а остальные равны 1 (направляющие точки и числа ω_a могут быть действительными или попарно комплексно сопряженными). Направляющие точки двух m-пар попарно расположены на $m+1$ „директрисах" — прямых, пересекающихся со всеми 4 плоскостями m-пар; двойное отношение W_a точек пересечения a-й директрисы с 4 плоскостями m-пар связано с числом ω_a соотношением $W_a = -\operatorname{tg}^2\omega_a$.

Для двух m-плоскостей S_n, ${}^lS_n$, K_n, B_n $(m \leqslant n-m-1)$ в общем случае неподвижные точки соответственного движения состоят из всех точек пересечения поляр этих m-плоскостей и из точек пересечения $m+1$ общих перпендикуляров этих плоскостей с абсолютом пространства, а из собственных чисел матрицы этого движения $2m+2$ имеют вид $e^{i\omega_a}$, $e^{-i\omega_a}$, а остальные равны 1. Числа ω_a — длины общих перпендикуляров или стационарные расстояния m-плоскостей (в общем случае в ${}^lS_n$ и B_n числа ω_a и общие перпендикуляры могут быть не только действительными, но и попарно комплексно сопряженными). Случай $m \geqslant n-m-1$ получаем, переходя к полярам рассмотренных m-плоскостей.

Для двух m-плоскостей R_n и ${}^lR_n$ $(m \leqslant n-m-1)$ в общем случае инвариантными элементами соответственного движения является одна

---

* Кроме того, известны отображения P_1^0 на ${}^1S_2$ и P_3^1 на ${}^3S_5^1$ с помощью перенесений Гессе и Плюккера (([2]), стр. 200 и 85) (группы $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_3$ соответственно изоморфны группам ${}^1\mathfrak{S}_2$ и ${}^3\mathfrak{S}_5$). Утверждение о K_1 и B_1 следует из результатов И. М. и А. М. Ягломов ([3]).

собственная прямая — общий перпендикуляр m-плоскостей — и m несобственных прямых, определяющих (с точностью до параллельного сдвига) „направляющие 2-плоскости“ m-плоскостей. Собственные числа матрицы этого движения определяют длину общего перпендикуляра — стационарное расстояние ω_0 m-плоскостей и m стационарных углов ω_a m-плоскостей. Случай $m \geqslant n' - m' - 1$ строится аналогично.

Для двух m-сфер C_n ($m \leqslant n - m - 2$) в общем случае неподвижные точки соответственного конформного преобразования состоят из всех точек пересечения $(n - m - 2)$-сфер, сопряженных данным сферам (в перенесении Дарбу — Клейна сопряженные сферы представляются взаимными полярами) и $2m+4$ изолированных точек („фокусы“ m-сфер), а из собственных чисел матрицы этого преобразования $2m+4$ имеют вид $e^{i\omega_a}$, $e^{-i\omega_a}$ ($a=0, \ldots, m+1$), а остальные равны 1; для действительных m-сфер при $m \leqslant n - m - 2$ все числа ω_a действительны, кроме одного, которое чисто мнимо, а все пары фокусов комплексно сопряжены, кроме одной, которая действительна. Действительные числа ω_a — стационарные углы гиперсфер, проходящих через наши m-сферы, чисто мнимое число ω_0 связано с радиусами двух концентрических m-сфер, в которые можно перевести наши m-сферы конформным преобразованием, соотношением $\omega_0 = i \ln \frac{r_2}{r_1}$ (при этом преобразовании действительные фокусы m-сфер переходят в их общий центр и несобственную точку C_n). Случай $m \geqslant n - m - 2$ получаем, переходя к сопряженным сферам рассмотренных m-сфер. Здесь могут быть 3 случая: одна пара фокусов действительна, остальные комплексно сопряжены (m-сферы „расцеплены“), все пары фокусов комплексно сопряжены (m-сферы „зацеплены“), промежуточный случай, когда одна пара фокусов сливается в одну точку (m-сферы „встречаются“).

Для двух гиперквадрик P_n в общем случае инвариантными элементами соответственного проективного преобразования (произведения двух поляритетов) являются 0-пары, точки которых — вершины, а гиперплоскости — грани симплекса, автополярного одновременно относительно обеих гиперквадрик.

Т е о р е м а 2. *В пространство образов симметрии можно ввести инвариантную относительно его основной группы аффинную связность без кручения, а в случае полупростоты этой группы — риманову или псевдориманову метрику, ставя в соответствие этому пространству вполне геодезическое подпространство группового пространства этой группы в его связности или метрике Картана, состоящее из симметрий относительно образов данного пространства.*

Здесь имеются в виду аффинная связность без кручения и метрика, введенная Картаном в групповые пространства групп Ли ([4], стр. 54, [5], стр. 31). Метрика Картана для полупростых групп Ли риманова для компактных групп и псевдориманова для некомпактных групп. Групповые пространства в связности или метрике Картана, а следовательно и пространства образов симметрии в нашей связности или метрике являются симметрическими пространствами Картана ([4], стр. 87, [5], стр. 44). Верно и обратное: всякое симметрическое пространство можно рассматривать как пространство образов симметрии.

Расстояние между двумя элементами пространств P_n^m, S_n^m, ${}^lS_n^m$, K_n^m, B_n^m, C_n^m и Q_n^{n-1} в метрике теоремы 2 (группы $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{S}_n$, ${}^l\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{K}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$ полупросты, из них $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{K}_n$ компактны) определяется их числовыми инвариантами ω_a по формуле $\omega^2 = \sum\limits_a \omega_a^2$ (для P_n^m, S_n^m, ${}^lS_n^m$, K_n^m, B_n^m $a = 0, \ldots, m$, для C_n^m $a = 0, \ldots m+1$, для Q_n^{n-1} надо заменить ω_a на ω_i/ω,

$i = \ldots, n$). В пространствах R_n^m и ${}^lR_n^m$ теорема 2 определяет только аффинную связность (группы $\mathfrak{R}_n$ и ${}^l\mathfrak{R}_n$ не полупросты)*.

Теорема 3. *Роль геодезических линий в пространствах образов симметрии в их аффинной связности или метрике теоремы 2 играют такие последовательности образов, что симметрии относительно них образуют класс смежности по 1-параметрической подгруппе основной группы данного пространства, т. е. такие последовательности образов, элементы которых имеют одни и те же геометрические инварианты, а их числовые инварианты ω_a с фиксированным элементом последовательности изменяются по закону $\omega_a = k_a t$.*

Для пар точек P_1 — это последовательность пар точек, связанных инволюционным соответствием (что очевидно из перенесения Гессе), в общем случае m-пар P_n — „m-инволюция" — последовательность m-пар с общими направляющими точками и пропорциональными инвариантами ω_a — многомерное обобщение инволюционного ряда. Для прямых R_3, ${}^lR_3$, S_3, ${}^lS_3$, K_3, B_3 — это последовательность прямолинейных образующих линейчатого геликоида, в общем случае m-плоскостей R_n, ${}^lR_n$, S_n, ${}^lS_n$, K_n, B_n — „m-геликоид" — последовательность m-плоскостей с общими перпендикулярами (для R_n и ${}^lR_n$ — с общими направляющими 2-плоскостями) и пропорциональными стационарными расстояниями и углами ω_a — многомерное обобщение линейчатого геликоида. Для пар точек C_2 — это последовательность пар точек, переводимых конформным преобразованием в две логарифмические спирали, симметричные относительно их общего фокуса, в общем случае m-сфер C_n — „m-спираль" — последовательность m-сфер с общими фокусами и пропорциональными инвариантами ω_a — многомерное обобщение пары логарифмических спиралей. Для гиперквадрик P_n — это последовательность гиперквадрик с общим автополярным симплексом, уравнения которых приводимы к виду $\sum_i \pm e^{k_i t} x^{i^2} = 0$**.

Поступило
18 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, II, Gröningen, 1938. [2] Ф. Клейн, Высшая геометрия, М. — Л., 1939. [3] И. М. Яглом и А. М. Яглом, ДАН, 53, № 5, 405 (1946). [4] E. Cartan, J. math. pur. et appl., (9) 6, 1 (1927). [5] E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs, Paris, 1930. [6] П. К. Рашевский, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу при МГУ, 6, 1 (1947). [7] E. Study, Am. J. Math., 29, 160 (1906). [8] E. Bortolotti, Atti d. congresso internaz. matem., Bologna, 4, 305 (1928). [9] J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere Oxford, 1916. [10] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, III, Berlin 1929. [11] А. П. Норден, ДАН, 50, 57 (1945). [12] В. В. Вагнер, Матем. сб. 10, (52): 3, 163 (1942). [13] Б. А. Розенфельд, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, 325 (1941). [14] Б. А. Розенфельд, Изв. АН СССР, сер. матем., 9, 371 (1945). [15] Б. А. Розенфельд, Изв. АН СССР, сер. матем. 11, 283 (1947).

---

* Пространства P_n^m, B_n^m, ${}^lS_n^1$ и C_n^0 являются расслоенными псевдоримановыми пространствами П. К. Рашевского ([6]).

** Метрика теоремы 2 и геодезические линии теоремы 3 рассматривались: для S_3^1 Штуди ([7]) (метрика и геликоиды как геодезические линии), для R_3^1 Бортолотти ([8]) (метрика, порождающая нашу аффинную связность и не обобщающаяся на общий случай, и геликоиды как геодезические линии), для C_3^2 Кулиджем ([9]) и Бляшке ([10]), для P_n^0 П. К. Рашевским и М. А. Джавадовым (не опубликовано), для R_n^{n-1} А. П. Норденом ([11]), для S_n^m В. В. Вагнером ([12]) (метрика) и нами ([13]) (m-геликоиды), для ${}^lS_n^m$, C_n^m и Q_n^{n-1} нами ([14]) (метрика) и для R_n^m нами ([15]) (аффинная связность и m-геликоиды).