Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 6

МАТЕМАТИКА

П. П. КУФАРЕВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ В ИНТЕГРАЛЕ ШВАРЦА—КРИСТОФФЕЛЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 III 1947)

В заметке предлагается метод численного определения параметров в интеграле Шварца—Кристоффеля, осуществляющем конформное отображение круга $|w|<1$ на однолистную полигональную область. Для краткости метод излагается для областей G, получаемых из плоскости z проведением разреза по ломаной, начинающейся в точке $z=\infty$ *.

Пусть

$$z=f_n(w)=e^{\ t_n}\int_0^w \frac{1-\dfrac{w}{\mu_n}}{\left(1-\dfrac{w}{a_\infty^{(n)}}\right)^3}\prod_{p=0}^{k-1}\left(\frac{1-\dfrac{w}{a_p^{(n)}}}{1-\dfrac{w}{b_p^{(n)}}}\right)^{\varkappa_p} dw \tag{1}$$

функция, отображающая $|w|<0$ на содержащую $z=0$ область G_n, получаемую из плоскости z проведением разреза по ломаной с вершинами $\infty, A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Функция $f_0(z)$ известна. Поэтому для определения $f_n(w)$ достаточно построить метод вычисления $f_{k+1}(w)$, если известна $f_k(w)$, т. е. известны точки:

$$\mu_k=e^{i\lambda_k}, \quad a_\infty^{(k)}=e^{i\varphi_k}, \quad a_p^{(k)}=e^{i\alpha_p^{(k)}}, \quad b_p^{(k)}=e^{i\beta_p^{(k)}} \tag{2}$$

$$(p=0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

и значение t_k.

Можно предполагать, что

$$\varphi_k<\alpha_0^{(k)}<\ldots<\alpha_{k-1}^{(k)}<\lambda_k<\beta_{k-1}^{(k)}<\beta_{k-2}^{(k)}<\ldots<\beta_0^{(k)}<\varphi_k+2\pi.$$

§ 1. Обозначим через A произвольную точку звена $A_k A_{k+1}$. Функция

$$z=f(w,t)=e^{\ t}\int_0^w \frac{1-\dfrac{w}{\mu(t)}}{\left(1-\dfrac{w}{a_\infty(t)}\right)^3}\prod_{p=0}^{k}\left(\frac{1-\dfrac{w}{a_p(t)}}{1-\dfrac{w}{b_p(t)}}\right)^{\varkappa_p} dw, \tag{3}$$

* Ограниченную полигональную область, граница которой не имеет совпадающих вершин, можно рассматривать как ядро семейства вложенных друг в друга областей G указанного типа. Поэтому оказывается, что метод непосредственно применим для ограниченных полигональных областей. Метод может быть распространен и на другие случаи.

отображающая $|w|<1$ на область $G(t)$, получаемую из плоскости z проведением разреза по ломаной $L(t)$ с вершинами $\infty, A_0, A_1, \ldots, A_k, A$, удовлетворяет уравнению Левнера:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+w\frac{\mu(t)+w}{\mu(t)-w}\frac{\partial f}{\partial w}=0 \quad (^1). \tag{4}$$

Отсюда следует, что аргументы точек:

$$\mu(t)=e^{i\lambda(t)}, \quad a_\infty(t)=e^{i\varphi(t)}, \quad a_p(t)=e^{i\alpha_p(t)},$$
$$b_p(t)=e^{i\beta_p(t)} \quad (p=0, 1, \ldots, k) \tag{5}$$

удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{d\alpha_p}{dt}=\operatorname{cotg}\frac{\alpha_p-\lambda}{2}, \quad \frac{d\beta_p}{dt}=\operatorname{cotg}\frac{\beta_p-\lambda}{2} \quad (p=0, 1, \ldots, k),$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=\operatorname{cotg}\frac{\varphi-\lambda}{2}, \quad \frac{d\lambda}{dt}=3\frac{d\varphi}{dt}+\sum_{p=0}^{k}\varkappa_p\left(\frac{d\beta_p}{dt}-\frac{d\alpha_p}{dt}\right). \tag{6}$$

§ 2. Система (6) имеет на сегменте $[t_k, t_{k+1}]$ единственное решение $\{\lambda(t), \varphi(t), \alpha_p(t), \beta_p(t)\}$ $(p=0, 1, \ldots, k)$, голоморфное относительно $\sqrt{t-t_k}$, принимающее при при $t\to t_k+0$ значения:

$$\alpha_p(t_k)=\alpha_p^{(k)}, \quad \beta_p(t_k)=\beta_p^{(k)} \quad (p=0, 1, \ldots, k-1),$$
$$\alpha_k(t_k)=\beta_k(t_k)=\lambda(t_k)=\lambda_k, \quad \varphi(t_k)=\varphi_k \tag{7}$$

и удовлетворяющее при $t\subset[t_k, t_{k+1}]$ неравенствам:

$$\varphi(t)<\alpha_0(t)<\alpha_1(t)<\ldots<\alpha_k(t)<\lambda(t)<$$
$$<\beta_k(t)<\beta_{k-1}(t)<\ldots<\beta_0(t)<\varphi(t)+2\pi.$$

§ 3. Пусть функция $P(w,t)$ регулярна относительно w, непрерывна по t при $T_0\leqslant t\leqslant T, |w|<1$, равномерно относительно t ограничена во всяком круге $|w|\leqslant r<1$ и $\operatorname{Re}P(w,t)>0$ при $|w|<1$, $t\subset[T_0, T]$.

Если $\chi(w)$, $\chi(0)=0$, $\chi'(0)=e^{-T_0}$, однолистна в $|w|<1$, то интеграл

$$z=F(w,t), \quad F(w, T_0)=\chi(w) \tag{8}$$

уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t}+wP(w,t)\frac{\partial F}{\partial w}=0 \tag{9}$$

при всяком $t\subset[T_0, T]$ отображает $|w|<1$ на однолистную область $B(t)$, причем при $t_1<t_2$ $B(t_1)\supset B(t_2)$.

В частности, теорема применима к интегралам уравнения (4) (ср.([1])).

§ 4. Предложение, обратное теореме § 1. Пусть $\{\lambda(t), \varphi(t), \alpha_p(t), \beta_p(t)\}$ — указанное в § 2 решение системы (6).

Тогда:

а) функция $z=f(w,t)$, определяемая формулами (3), (5), удовлетворяет уравнению (4);

б) если $\omega(t)\neq a_\infty(t)$ — интеграл уравнения

$$\frac{d\omega}{dt}=\omega\frac{\mu(t)+\omega}{\mu(t)-\omega}, \tag{10}$$

то

$$\int_{0}^{\omega(t)} f'_w(w,t)\,dw = \int_{0}^{\omega(t_k)} f'_w(w,t_k)\,dw = \text{cons} \tag{11}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} \zeta_p(t) &= \int_{0}^{a_p(t)} f'_w(w,t)\,dw = \zeta_p(t_k), \\ \tilde{\zeta}_p(t) &= \int_{0}^{b_p(t)} f'_w(w,t)\,dw = \zeta_p(t_k) \end{aligned} \tag{12}$$

(интегрирование производится вдоль кривых, лежащих в $|w| < 1$)*.

Отсюда и из теоремы § 3 следует, что при $t \subset [t_k, t_{k+1}]$ функция $z = f(w,t)$, определяемая формулами (3), (5), отображает $|w| < 1$ на область $G(t)$, получаемую из плоскости z проведением разреза по $L(t)$.

Длина s отрезка A_kA удовлетворяет уравнению:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{4} e^{-t} \left| \sin^{-3}(\lambda - \varphi) \prod_{p=0}^{k} \left(\frac{\sin(\lambda - \alpha_p)^{\varkappa_p}}{\sin(\lambda - \beta_p)} \right| .$$

§ 5. Таким образом, если известна функция $f_k(w)$, то аргументы параметров $a_p^{(k+1)}$, $b_p^{(k+1)}$ $(p = 0, 1, \ldots, k)$, $a_\infty^{(k+1)}$, μ_{k+1} функции $f_{k+1}(w)$ могут быть определены как значения, принимаемые при $t \to t_{k+1} - 0$ решением (§ 2) системы (6). Для численного определения их могут быть применены известные хорошо разработанные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Значение t_{k+1} определяется при вычислениях из условия:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} ds = \left| \overline{A_k A_{k+1}} \right| .$$

Физико-технический институт
Томского государственного
университета им. В. В. Куйбышева

Поступило
25 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Усп. матем. наук, **6**, 38 (1939); Матем. сб., **6** (48): 3, 383 (1939).

---

* Формулы (12) вместе с соотношениями: $\lambda - 3\varphi - \sum_{p=0}^{k} \varkappa_p (\beta_p - \alpha_p) = \text{const}$, $\operatorname*{Res}_{w = a_\infty} f_w'(w,t) = 0$ дают полную систему первых интегралов системы уравнений (6).