Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. РОХЛИН

О ПРОБЛЕМЕ КЛАССИФИКАЦИИ АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IV 1947)

В этой заметке я пользуюсь терминологией, обозначениями и результатами моей заметки ([1]).

1. Автоморфизм U пространства Лебега M есть изоморфизм M на самое M. Множество A инвариантно относительно U, если $UA \subset A$. U называется транзитивным, если мера всякого измеримого инвариантного множества равна либо нулю, либо единице. Первой задачей теории является классификация автоморфизмов пространств Лебега.

На пути к общему решению этой проблемы сделан пока только один шаг: J. v. Neumann'y ([2]) удалось в известном смысле разложить произвольный автоморфизм на транзитивные компоненты *. К этому разложению можно притти следующим образом **.

Назовем разбиение ζ неподвижным относительно U, если все его элементы C (а следовательно, и все ζ-множества) инвариантны относительно U. Если ζ измеримо, то множества C можно рассматривать как пространства Лебега (([1]), $n°$ 10), и U индуцирует в них некоторые автоморфизмы U_C — компоненты автоморфизма U. В этом смысле каждому неподвижному относительно U измеримому разбиению отвечает (аддитивное) разложение автоморфизма U. Среди всех таких разложений существует mod 0 самое мелкое: разложение, отвечающее измеримой оболочке (([1]), $n°$ 9) разбиения пространства M на траектории, пробегаемые его точками под действием автоморфизмов U^n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Это и есть разложение автоморфизма U на транзитивные компоненты. Оно называется в дальнейшем каноническим, как и то измеримое разбиение, которому оно соответствует. Каноническое разложение автоморфизма U определяется им mod 0 однозначно.

2. Результаты, излагаемые в этой заметке ($n°$ 4), позволяют определить тип произвольного автоморфизма по типам его транзитивных компонент и тем самым сводят проблему классификации автоморфизмов общего вида к проблеме классификации транзитивных автоморфизмов. Формулировка этих результатов требует некоторых предварительных рассмотрений.

Пусть M, как и выше,— пространство Лебега, и R — некоторое метрически абсолютное G_δ со счетной базой. Рассмотрим в теоретико-множественном произведении $M \times R$ множеств M и R подмножества вида

$$Z = X \times Y, \qquad (*)$$

* Точнее, в ([2]) дано разложение потока (см. ниже, $n°$ 5).
** Ср. ([3]) и ([4]).

где X — измеримое множество в M, а Y — открытое множество в R. Суслинские mod 0 множества, порожденные множествами вида (*), т. е. множества вида $S+N$, где S — суслинское множество, порожденное множествами вида (*), а N — множество, проекция которого в M имеет меру нуль, мы будем называть *измеримыми* $L-A$. *Функцию* φ, однозначную или многозначную, определенную на M и имеющую R областью своих значений, мы будем называть измеримой, если множество $\bigcup x \times \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ есть множество всех значений функции φ в точке x и суммирование распространено на все точки $x \in M$, измеримо $L-A$. Если φ однозначна, то это определение эквивалентно обычному.

3. Обозначим через $\mathfrak{G}_M$ группу (классов тождественных mod 0) автоморфизмов пространства M. Если объявить окрестностью (класса) автоморфизма U_0 множество (классов) автоморфизмов U, удовлетворяющих конечному числу неравенств вида

$$\mu(U_0A+UA-U_0A\cdot UA)<\varepsilon,$$

где A — измеримое множество, а ε — положительное число, то $\mathfrak{G}_M$ станет метрически абсолютным G_δ со счетной базой.

Структура $\mathfrak{G}_M$ целиком определяется структурой пространства M, т. е. последовательностью чисел $m_n(M)$ ([1], n° 5); если мера μ непрерывна, то вместо $\mathfrak{G}_M$ мы пишем $\mathfrak{G}_0$. Условимся называть типы транзитивных автоморфизмов пространств Лебега *транзитивными типами* и обозначим через $\mathfrak{S}_M$ множество транзитивных типов пространства M, т. е. множество классов сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}_M$; если мера μ непрерывна, то вместо $\mathfrak{S}_M$ мы пишем $\mathfrak{S}_0$. Наконец, обозначим через τ_n тип автоморфизма, который определен в пространстве Лебега, состоящем из n точек меры $1/n$, и производит циклическую перестановку этих точек. Присоединив к множеству $\mathfrak{S}_0$ все типы τ_n, мы получим множество $\mathfrak{S}$ *всех* транзитивных типов. Условимся понимать под *семейством транзитивных типов* (однозначную) функцию, отображающую пространство Лебега M в множество $\mathfrak{S}$.

Всякому семейству Φ транзитивных типов отвечает разбиение пространства M:

$$M=P+\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n,$$

где P есть множество тех $x \in M$, для которых $\Phi(x) \in \mathfrak{S}_0$, а P_n — множество тех $x \in M$, для которых $\Phi(x)=\tau_n$.

Мы будем называть семейство Φ *измеримым*, если: 1) все P_n измеримы и 2) определенная на P (многозначная) функция, значениями которой в каждой точке $x \in P$ являются все элементы пространства $\mathfrak{G}_0$ типа $\Phi(x)$, есть измеримая функция в смысле n° 2.

4. Теперь мы в состоянии формулировать основной результат. Типы $\tau(U_C)$ транзитивных компонент автоморфизма U, определенного в пространстве Лебега M, образуют семейство транзитивных типов, определенное на фактор-пространстве M/ζ пространства M по каноническому разбиению ζ. Мы обозначим это семейство через Φ_U. Очевидно, что тип $\tau(\Phi_U)$ семейства Φ_U является инвариантом автоморфизма U.

Оказывается, что семейство Φ_U измеримо, и если $\tau(\Phi_U)=\tau(\Phi_V)$, то U и V mod 0 изоморфны. При этом, каков бы ни был тип τ измеримого семейства транзитивных типов, всегда существует такой автоморфизм U, что $\tau(\Phi_U)=\tau$.

5. Все сказанное в предыдущем n° дословно переносится на случай, когда вместо отдельного автоморфизма U (или, что то же, вместо циклической группы автоморфизмов U^n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) рассматри-

вается поток U^t $(-\infty < t < \infty)$, т. е. непрерывная ($\lim_{t\to t_0} U^t = U^{t_0}$ в пространстве $\mathfrak{G}_M$) однопараметрическая группа ($U^{t+s} = U^t U^s$) автоморфизмов. Нужно только всюду заменить слово „автоморфизм" словом „поток" и символ U символом U^t. Конечно, соответствующим образом должны быть модифицированы и определения $n^\circ n^\circ$ 1 и 3. Так получаются определения транзитивного потока, канонического разложения потока U^t на транзитивные компоненты U_C^t типов τ (U_C^t) и семейства Φ_U^t.

Особого замечания заслуживает определение топологии в группе $\mathfrak{G}_M'$ (классов тождественных mod 0) потоков, которая появляется на месте группы $\mathfrak{G}_M$: окрестность (класса) потока U_0^t есть множество (классов) потоков U^t, удовлетворяющих конечному числу неравенств вида

$$\mu(U_0^t A + U^t A - U_0^t A \cdot U^t A) < \varepsilon,$$

где A — измеримое множество, ε — положительное число и t принадлежит некоторому конечному интервалу. Эта топология делает группу $\mathfrak{G}_M'$ метрически-абсолютным G_δ.

Наконец, определение измеримого семейства транзитивных типов в случае потоков даже проще соответствующего определения n° 3, ибо в случае потоков множество $\mathfrak{G}'$ всех транзитивных типов состоит из множества $\mathfrak{G}_0'$ типов транзитивных потоков в пространстве Лебега с непрерывной мерой и одного единственного тривиального типа, представляющего собою тип потока в пространстве Лебега, состоящем из одной точки.

Поступило
12 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Рохлин, ДАН, 58, № 1 (1947). [2] J. v. Neumann, Ann. of Math., 33, 587 (1932). [3] P. R. Halmos, Duke Math. J., 8, 386 (1941). [4] W. Ambrose, P. R. Halmos, S. Kakutani, Duke Math. J., 9, 43 (1942).