Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

О НАИЛУЧШЕМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ В СРЕДНЕМ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 IV 1947)

Пусть $W^{(s-1)}V$ $(s=1, 2, \ldots)$ есть класс функций f, имеющих абсолютно непрерывную на $[-1, +1]$ производную $f^{(s-2)}(x)$ порядка $s-2$ и производную $f^{(s-1)}(x)=\varphi(x)$ порядка $s-1$ с ограниченной вариацией, удовлетворяющей неравенству

$$\|\varphi\|_v = \operatorname*{var}_{-1\leqslant x\leqslant 1} \varphi(x) \leqslant 1. \tag{1}$$

При этом при $s=1$ считаем, что $W^{(0)}V$ есть класс функций $f(x)=\varphi(x)$ ограниченной вариации, удовлетворяющих неравенству (1).

Класс $W^{(s-1)}V$ содержит в себе класс $W^{(s)}L$ функций, имеющих абсолютно непрерывную производную $f^{(s-1)}(x)$ порядка $s-1$, для которой

$$\operatorname{var}\varphi = \|\varphi'\|_L = \int_{-1}^{+1} |\varphi'(t)|\, dt \leqslant 1, \quad f^{(s)}(x) = \varphi'(x). \tag{2}$$

Пусть, далее,

$$E_n(f)_L = \min_{P_n} \int_{-1}^{+1} |f(x) - P_n(x)|\, dx, \tag{3}$$

где минимум распространен на всевозможные многочлены

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

степени n и

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_L = \sup_{f\in\mathfrak{M}} E_n(f)_L, \tag{4}$$

где верхняя грань распространена на множество $\mathfrak{M}$ функций f.

В этой заметке мы доказываем следующие теоремы.

Теорема 1. *Справедливы равенства*:

при $s=2, 4, \ldots$

$$\mathcal{E}_n(W^{(s-1)}V)_L = \mathcal{E}_n(W^{(s)}L)_L = \frac{1}{2(s-1)!} \max_{-1\leqslant a\leqslant 1} E_n(|a-x|^{s-1})_L \approx$$

$$\approx \frac{1}{2(s-1)!} E_n(|x|^{s-1})_L \approx \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{s+1}} \frac{1}{n^s} \quad (n\to\infty); \tag{5}$$

при $s=1, 3, 5, \ldots$

$$\mathcal{E}_n(W^{(s-1)}V)_L=\mathcal{E}_n(W^{(s)}L)_L=\frac{1}{2(s-1)!}\max_{-1\leqslant a\leqslant 1}E_n((a-x)\,|\,a-x\,|^{s-2})_L\approx$$

$$\approx\frac{1}{2(s-1)!}E_n(x\,|\,x\,|^{s-2})_L\approx\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{s+1}}\,\frac{1}{n^s}\quad(n\to\infty). \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть*

$$P_n^{(s)}(x, a)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(s)}(a)\,x^k$$

есть многочлен степени n, наилучший в среднем на отрезке $(-1, +1)$ для функции $|\,a-x\,|^{s-1}$ при s четном и для функции $(a-x)|\,a-x\,|^{s-2}$ при s нечетном.

Тогда линейный метод

$$U_n(f, x)=\frac{1}{2(s-1)!}\sum_{k=0}^{n}x^k\int_{-1}^{+1}\alpha_k^{(s)}(t)\,d\varphi(t),\quad \varphi(t)=f^{(s-1)}(t) \tag{7}$$

приближения функции f многочленами степени n есть (точно) наилучший для классов $W^{(s-1)}V$ и $W^{(s)}L$.

Иначе говоря,

$$\sup_{f\in W^{(s-1)}V\text{ или }W^{(s)}L}\int_{-1}^{+1}|\,f(x)-U_n(f, x)\,|\,dx=\mathcal{E}_n(W^{(s-1)}V)_L=\mathcal{E}_n(W^{(s)}L)_L. \tag{8}$$

Доказательство при s четном. Если $f\in W^{(s-1)}V$, то обозначая через $P_m(x)$ или $P_m^*(x)$ некоторый многочлен степени m, будем иметь $(f^{(s-1)}(x)=\varphi(x))$

$$f(x)=\frac{1}{(s-2)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-2}f^{(s-1)}(t)\,dt+P_{s-2}(x)=$$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{s-1}d\varphi(t)+P_{s-1}^*(x)=\frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1}|\,x-t\,|^{s-1}d\varphi(t)+P_{s-1}(x).$$

Первая строка равенств (5) и теорема 2 непосредственно следуют из теорем 1 и 2 моей статьи ([1]).

В моей работе ([2]) (см. теорему 1, равенства (3,1) и (3,2)) показано, что при s четном

$$E_n(|a-x\,|^{s-1})_L=\frac{M_{s-1}(1-a^2)^{s/2}}{n^s}+O\left(\frac{\lg n}{n^{s+1}}\right), \tag{9}$$

$$M_{s-1}=(s-1)!\,\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{s+1}} \tag{10}$$

равномерно относительно a, удовлетворяющих неравенству $|\,a\,|\leqslant\eta<1$, где η в остальном произвольное число.

Отсюда

$$\max_{|a|\leqslant\eta}E_n(\,|\,a-x\,|^{s-1})_L=\frac{M_{s-1}}{n^s}+O\left(\frac{\lg n}{n^{s+1}}\right). \tag{11}$$

С другой стороны, положим

$$\eta < a \leqslant 1, \quad k = \frac{1+2a-\eta}{1+\eta}, \quad \mu = \frac{2}{1+k};$$

тогда

$$\frac{1+\eta}{1-\eta} = \frac{1+a}{k-a}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1+a}{1+\eta} \leqslant \frac{2}{1+\eta}, \quad k > 1$$

и, таким образом, точка μa делит отрезок $(-\mu, \mu k)$ длины 2 в том же отношении, в каком η делит отрезок $(-1, +1)$. Поэтому, обозначив через $E_n(f;\ a,\ b)_L$ наилучшее приближение f на отрезке (a, b), получим

$$E_n(|a-x|^{s-1})_L = E_n(|a-x|^{s-1};\ -1, 1)_L \leqslant E_n(|a-x|^{s-1};\ -1, k)_L =$$

$$= \frac{1}{\mu^{s-1}} E_n(|\mu a - \mu x|^{s-1};\ -1, k)_L = \frac{1}{\mu^s} E_n(|\mu a - y|^{s-1}; -\mu, \mu k)_L =$$

$$= \frac{1}{\mu^s} E_n(|\eta - x|^{s-1})_L = \frac{2^s}{(1+\eta)^s} E_n(|\eta - x|^{s-1})_L \quad (\eta < a \leqslant 1)$$

и, в силу (9),

$$\underset{\eta < a \leqslant 1}{E_n}(|a-x|^{s-1})_L \leqslant H(\eta)\frac{M_{s-1}}{\eta^s} + O\left(\frac{\lg n}{n^{s+1}}\right), \tag{12}$$

$$H(\eta) = \frac{2^s(1-\eta^2)^{s/2}}{(1+\eta)^s}.$$

Легко видеть, что существует такое $\eta = \eta_0$ $(0 \leqslant \eta_0 < 1)$, что $H(\eta_0) = 1$; далее, очевидно, неравенство (12) сохраняется при $\eta < |a| \leqslant 1$. Если теперь в (11) и (12) положить $\eta = \eta_0$, то получим утверждение, содержащееся во второй строке равенства (5) (см. ([2]), стр. 148).

Примечание 1. Мы доказали, что максимум $E_n(|x-a|^{s-1})_L$; в сегменте $-1 \leqslant a \leqslant 1$ достигается асимптотически при $a=0$. Для фиксированного n это неверно; например, вычисления показывают, что $E_2(|x|)_L = 0{,}118\ldots$, а $E_2\left(\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)_L = 0{,}164\ldots$

Доказательство при s нечетном проводится аналогично. Нужно принять во внимание, что в этом случае, если $f \in W^{(s-1)}V$ и $f^{(s-1)}(x) = \varphi(x)$, то

$$f(x) = \frac{1}{2(s-1)!}\int_{-1}^{+1} |x-t|^{s-2}(x-t)\varphi(t)\,dt + P_{s-1}(x).$$

и при $n \to \infty$

$$\max_{-1 \leqslant a \leqslant 1} E_n((x-a)|x-a|^{s-2})_L \approx E_n(x|x|^{s-2})_L,$$

причем (при n четном)

$$E_n(x|x|^{s-2})_L = \left|\int_{-1}^{+1} x|x|^{s-2}\,\mathrm{sign}\sin n \arccos x\,dx\right| =$$

$$= \frac{1}{2^s}\left| C_{s-1}^{\frac{s-1}{2}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2n} + \sum_{l=1}^{\frac{s-1}{2}} C_{s-1}^{\frac{s-1}{2}-l}(-1)^l\left[\frac{1}{2l+1}\,\mathrm{tg}\,\frac{(2l+1)\pi}{2n} + \frac{1}{2l-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{(2l-1)\pi}{2n}\right]\right| \approx$$

$$\approx (s-1)!\,\frac{8}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{s+1}}\,\frac{1}{n^s} \quad (n \to \infty).$$

Примечание 2. Функции $|x|^{s-1}/2(s-1)!$ при s четном и $x|x|^{s-2}/2(s-1)!$ при s нечетном (не зависящие от n) принадлежат к классу $W^{(s-1)}V$ и, следовательно, равенства (5) и (6) для них асимптотически достижимы. Что касается функций $f \in W^{(s)}L$, то для каждой из них $E_n(f)_L = o(n^{-s})$; это легко доказывается по индукции, воспользовавшись теоремой 1 и тем обстоятельсгвом, что если f суммируемая функция, то $E_n(f)_L = o(1)$.

Примечание 3. Если через $W^{(s)}L_*$ обозначить класс функций периода 2π, обладающих во всем остальном свойствами функций класса $W^{(s)}L$, то, сопоставляя доказанную теорему 1 с ранее полученным мною результатом ([3], § 7, п. 2), получим

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_*} E_n^*(f)_L = \mathscr{E}_n(W^{(r)}L_*)_L \approx \mathscr{E}_n(W^{(r)}L)_L \quad (n \to \infty),$$

где $E_n^*(f)$ есть наилучшее приближение функции f при помощи тригонометрических полиномов порядка n.

Поступило
9 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, ДАН, 58, № 1 (1947) [2] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, № 2 (1947). [3] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 207 (1946).