Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Л. В. КЕЛДЫШ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОМПАКТОВ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 16 IV 1947)

Мы изучаем непрерывные (однозначные) отображения компактов $Y=f(X)$, X и Y лежат в евклидовом пространстве *, и даем необходимое и достаточное условие для того, чтобы образ имел данную размерность.

Известно, что каждое замкнутое множество F размерности n может быть представлено как сумма конечного числа замкнутых слагаемых так, что пересечение k различных слагаемых имеет размерность не бо́льшую, чем $n-k+1$. Мы будем называть разбиение F на замкнутые слагаемые правильным, если выполняется это условие.

Если диаметры всех слагаемых разбиения $<\varepsilon$, мы называем его ε-разбиением.

Лемма. *Если X—компакт, $Y=f(X)$, где f непрерывно, и для Y существует ε-разбиение порядка m, то существует правильное разбиение X на куски* **, *индуцирующее ε-разбиение Y порядка m.*

По условию $Y=\Sigma F_i$, где F_i — компакты диаметра $<\varepsilon$, причем $F_{i_1}\ldots F_{i_{m+2}}=0$.

Будем доказывать лемму по индукции. Для случая $m=0$ она очевидна, так как в этом случае $F_i\cdot F_j=0$, и $X=\Sigma f^{-1}(F_i)$ является искомым разбиением.

Предположим, что лемма верна для $m-1$, и покажем, что она верна для m. Рассмотрим компакты $\Phi_r=F_{i_1}\ldots F_{i_{n+1}}$. Так как порядок разбиения Y равен m, то $\Phi_r\cdot\Phi_{r'}=0$ при $r'\neq r$. Тогда каждое Φ_r можно покрыть открытым в Y множеством U_r диаметра $<\varepsilon$ так, что $U_r\cdot U_{r'}=0$ при $r'\neq r$. В каждом множестве $f^{-1}(U_r)$ возьмем новое открытое в X множество S_r, содержащее $f^{-1}(\Phi_r)$ так, чтобы его замыкание $\overline{S}_r$ содержалось в $f^{-1}(U_r)$. Тогда имеем, очевидно, $f(\overline{S}_r)\cdot f(\overline{S}_{r'})=0$ при $r'\neq r$.

Рассмотрим теперь компакт $X_1=\overline{X-\Sigma\overline{S}_r}$, где сумма берется по всевозможным r. X_1 кусок X и $\dim X_1\leqslant\dim X=n$. Пусть $Y_1=f(X_1)$;

* Во всем дальнейшем мы предполагаем это условие выполненным.

** Куском называется замыкание открытого в X множества.

тогда $Y_1 = \Sigma Y_1 \cdot F_l$. Легко видеть, что это разбиение Y_1 является ε-разбиением порядка меньшего, чем m, так как Y_1 не содержит точек множеств Φ_r. Так как для чисел меньших m лемма по предположению верна, то существует правильное разбиение X_1 на куски $\bar{\sigma}_j$, индуцирующее ε-разбиение Y_1 порядка $\leqslant m-1$.

Будем теперь строить правильное разбиение X. Мы сделаем это, заменив построенные нами открытые множества S_r новыми, соответственно содержащими их, множествами S'_r, а каждое σ_j открытым в X множеством $\sigma'_j = \sigma_j - \Sigma \bar{S}_r$.

Рассмотрим множества $E_k = \Sigma \bar{\sigma}_{j_1} \ldots \bar{\sigma}_{j_k}$, где сумма распространяется на всевозможные кортежи индексов $j_1 \ldots j_k$, $j_\mu \neq j_\nu$. Каждое E_k — компакт размерности $\leqslant n-k+1$, и $E_{n+1} \subset E_n \subset \ldots \subset E_1 = X_1$.

Пусть B_r — граница S_r в X; $\dim E_{n+1} \leqslant 0$, поэтому компакт $B_r \cdot E_{n+1}$ можно покрыть окрестностью V_r, замыкание которой содержится в $f^{-1}(U_r)$ и граница не пересекается с E_{n+1}. Рассмотрим открытое множество $S_r^{n+1} = V_r + S_r$. Замыкание его $\bar{S}_r^{n+1}$ содержится в $f^{-1}(U_r)$, а граница B_r^{n+1} не пересекается с E_{n+1}.

Предположим, что мы уже построили открытые множества S_r^{k+1} с границами B_r^{k+1} так, что $S_r \subset S_r^{k+1}$ и $\bar{S}_r^{k+1} \subset f^{-1}(U_r)$, причем для каждого $\nu \geqslant k+1$ имеем: $\dim B_r^{k+1} \cdot E_\nu \leqslant n-\nu$, и построим множество S_r^k.

Заметим, что множество $E_k - E_{k+1}$ открыто в E_k, и рассмотрим точку x множества $B_r^{k+1}(E_k - E_{k+1})$. Найдется сфера δ_x с центром в x, не содержащая точек E_{k+1}. Внутри этой сферы выберем окрестность V_x точки x, лежащую с замыканием внутри $f^{-1}(U_r)$ и такую что $\dim b_x \cdot E_k \leqslant n-k$, где b_x — граница V_x; это можно сделать, так как $\dim E_k \leqslant n-k+1$. Пусть $\mathscr{E}_p$ — множество точек $B_r^{k+1} \cdot E_k$, отстоящих от E_{k+1} на расстояние ρ, удовлетворяющее условию $\frac{1}{p+1} \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{p}$. Для компакта $\mathscr{E}_p$ найдется покрывающая его сумма $V_{p1}^r + V_{p2}^r + \ldots + V_{pl_p}^r$ конечного числа окрестностей V_x, соответствующих точкам $\mathscr{E}_p$. При этом каждое V'_{pq} имеет диаметр $< \frac{1}{p}$, так как лежит в сфере с центром в точке, $x \subset \mathscr{E}_p$, не содержащей точек E_{k+1}.

Положим

$$S_r^k = S_r^{k+1} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{l_p} V_{pq}^r.$$

Имеем, очевидно, $S_r^k \subset f^{-1}(U_r)$. Легко видеть, что

$$B_r^k \subset B_r^{k+1} - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{l_p} V'_{pq} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{l_p} b_{pq}^r, \tag{1}$$

где b_{pq}^r — граница V_{pq}^r в X, так как верхний топологический предел множеств V_{pq}^r содержится в $B_r^{k+1} \cdot E_{k+1}$.

Из формулы (1) следует непосредственно $\dim B_r^k \cdot E_\nu \leqslant n - \nu$ при $\nu \leqslant k+1$. Но $B_r^k \cdot (E_k - E_{k+1}) \subset \Sigma\Sigma b_{pq}^r$, а каждое $E_k \cdot b_{pq}^r$ — компакт размерности $\leqslant n - k$. Следовательно, $\dim B_r^k \cdot (E_k - E_{k+1}) \leqslant n - k$. Но $B_r^k \cdot E_k = B_r^{k+1} \cdot E_{k+1} + B_r^k (E_k - E_{k+1})$, следовательно, $\dim B_r^k \cdot E_k \leqslant n - k$. Двигаясь этим процессом, мы построим открытые в X множества S_r', замыкания которых содержатся, соответственно, в $f^{-1}(U_r)$, и $\dim B_r' \cdot E_k \leqslant n - k$ для любого k.

Рассмотрим разбиение X, элементами которого являются множества $\overline{S}_r'$ и замыкания множеств $\sigma_j' = \sigma_j - \Sigma S_r$, где суммирование производится по всем r. Покажем, что оно удовлетворяет условиям леммы. Прежде всего заметим, что $f(\overline{S}_r') \cdot f(\overline{S}_{r'}') = 0$ при $r' \neq r$, так как $\overline{S}_r' \subset f^{-1}(U_r)$. Поэтому непустое пересечение k элементов нового разбиения состоит либо из пересечения k множеств $\overline{\sigma}_j'$, либо из пересечения $k-1$ элементов $\overline{\sigma}_j'$ и одного элемента $\overline{S}_r'$. В первом случае имеем, очевидно, $\dim \overline{\sigma}_{j_1}' \ldots \overline{\sigma}_{j_k}' \leqslant n - k + 1$. Во втором же случае $\overline{S}_r' \cdot \overline{\sigma}_{j_1}' \ldots \overline{\sigma}_{j_{k-1}}' \subset B_r' \cdot E_{k-1}$ и, следовательно, $\dim \overline{S}_r' \cdot \overline{\sigma}_{j_1}' \ldots \overline{\sigma}_{j_{k-1}}' \leqslant n - k + 1$. Значит, полученное разбиение X правильное. Оно индуцирует ε-разбиение Y на $f(\overline{S}_r')$ и $f(\overline{\sigma}_j')$. Непустое пересечение элементов разбиения Y содержит не более одного множителя $f(\overline{S}_r')$ и не более m множителей $f(\overline{\sigma}_j')$, всего не более $m+1$ множителей. Следовательно, порядок индуцируемого разбиения Y не выше m, что и требовалось доказать.

Теорема. *Для того чтобы непрерывный образ Y компакта X имел размерность m, необходимо и достаточно, чтобы m было наименьшим числом, для которого, каково бы ни было ε, существует правильное разбиение X на куски, индуцирующее ε-разбиение Y порядка m.*

Доказательство легко следует из леммы.

Следствие. *Для того чтобы непрерывный образ Y компакта X размерности n имел размерность $n+k$, необходимо и достаточно, чтобы k было наименьшим числом, для которого, каково бы ни было ε, существует разбиение X на куски порядка не выше n, индуцирующее ε-разбиение Y порядка $n+k$.*

Было бы интересно выяснить, какие дополнительные условия можно наложить на разложение X так, чтобы необходимое и достаточное условие повышения размерности при непрерывном отображении приняло форму, при которой из него вытекает известное необходимое условие Гуревича — о кратности точек ([1]). Заметим, что для случая неприводимого отображения одномерного компакта X, удовлетворяющего условию (α) (([2]), стр. 74), полученное нами разбиение X может быть построено так, что, если $\dim Y = n$, точка y входит в пересечение $n+1$ элементов индуцированного ε-разбиения Y, то каждая точка x, входящая в $f^{-1}(y)$, является внутренней в содержащем ее элементе разбиения X. Отсюда для этого случая очевидно вытекает условие Гуревича.

Отметим, что аналогичные лемма и теорема легко распространяются на случай, когда X и Y произвольные метрические сепарабельные пространства и f—замкнутое отображение.

Поступило
16 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 W. Hurewicz, Proc. of the Sect. of Sci. Akad. Amsterdam, **30**, 159 (1927).
2 W. Hurewicz, J. f. reine u. angew. Math., **169** (1933).