Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 8

МАТЕМАТИКА

И. Н. САНОВ

О ПРОБЛЕМЕ БЕРНСАЙДА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 III 1947)

Как известно, одна из частей проблемы Бернсайда о периодических группах (1) состоит в том, чтобы ответить на вопрос: конечна или бесконечна группа с конечным числом производящих элементов, все элементы которой имеют порядок n или делитель n.

Оказывается, применяя теорему Шрайера (2) о ранге подгруппы конечного индекса свободной группы с конечным числом производящих элементов, можно высказать некоторые соображения о числе элементов таких периодических групп, у которых период n составное число, и, кроме того, доказать условную теорему о сведении любого числа производящих элементов к случаю двух производящих.

1. Пусть $\mathfrak{G} = \{a, b\}$ — свободная группа с двумя производящими элементами a и b.

Обозначим $D_n = \{g^n, g_1^n, g_2^n, \ldots\}_{g_i \in \mathfrak{G}}$ подгруппу $\mathfrak{G}$, порожденную всеми n-степенями элементов $\mathfrak{G}$. Тогда факторгруппа $\mathfrak{G}/D_n$ — максимальная периодическая группа с двумя образующими и периодом n (всякая другая периодическая группа с двумя образующими и периодом n является факторгруппой вышеуказанной группы).

Теорема (условная). *Если факторгруппы $\mathfrak{G}/D_{n^l}$ конечны при всех целых положительных l, то периодическая группа $\mathfrak{G}_1 = \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ с любым числом производящих элементов и периодом n тоже конечна.*

Доказательство. Используем уже упомянутую выше теорему Шрайера о том, что подгруппа конечного индекса j свободной группы с m свободными производящими элементами сама будет свободная группа с $k = 1 + j(m-1)$ свободными производящими. $\mathfrak{G}/D_n$ по предположению конечна.

Пусть $(\mathfrak{G}, D_n) = j_1$. Поэтому D_n — свободная группа с $k_1 = 1 + j_1(2-1) = 1 + j_1$ свободными производящими элементами. $D_n = \{d_1, d_2, \ldots d_{k_1}\}$. Рассмотрим $D'_n = \{d^n\}_{d \in D_n}$ — подгруппу D_n, порожденную всеми n-ми степенями элементов D_n. $D_{n^2} \subset D'_n \subset D_n \subset \mathfrak{G}$. Но, по предположению $\mathfrak{G}/D_{n^2}$ конечна, поэтому и D_n/D'_n тоже конечна; если индекс $(D_n, D'_n) = j_2$, то, по теореме Шрайера, D'_n — свободная группа с $k_2 = 1 + j_2(k_1 - 1)$ свободными производящими элементами.

Строим $D''_n = \{d'^n\}_{d' \in D'_n}$ — подгруппу D'_n, порожденную всеми n-ми степенями ее элементов, $D_{n^3} \subset D''_n \subset D'_n \subset D_n \subset \mathfrak{G}$.

Но так как $\mathfrak{G}/D_{n^3}$ конечна по предположению, то группа D'_n/D''_n тоже конечная периодическая группа с периодом n и числом производящих элементов k_2. Совершенно очевидно, что это максимальная периодическая группа с k_2 образующими и периодом n. Процесс построения таких подгрупп можно неограниченно продолжить, и мы получим цепочку периодических максимальных групп с периодом n

$$D_n^{(r-1)}/D_n^{(r)}, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

с k_r производящими элементами, причем числа $k_1, k_2, k_3, \ldots$ образуют последовательность, очень быстро неограниченно растущую. Обозначим $(D_n^{(r-1)}, D_n^{(r)}) = j_{r+1}$, так как имеют место очевидные неравенства: $j_{r+1} \geqslant n^{k_r}$ (если допустить, что (1) — абелевы группы).

Тогда, по теореме Шрайера,

$$k_{r+1} = 1 + j_{r+1}(k_r - 1) \geqslant 1 + n^{k_r}(k_r - 1),$$

и это неравенство при $r = 1, 2, \ldots$ дает быстро растущую последовательность k_r.

Таким образом мы доказали теорему для $k = k_r$, $r = 1, 2, \ldots$ Для k промежуточных конечность соответствующей периодической группы следует из того, что эта группа будет факторгруппой максимальной периодической группы с числом производящих $k_r > k$.

Замечание. Очевидно, теорему можно доказать в предположении конечности всех факторгрупп $\mathfrak{G}/D_{n_i}$, где $n_1 = n$,

$$n_1 \mid n_2, \ n_2 \mid n_3, \ldots \text{ и } n_i \to \infty.$$

2. Пусть $\mathfrak{G} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — свободная группа с k производящими элементами. $D_n = \{g^n, g_1^n, g_2^n, \ldots\}_{g_i \in \mathfrak{G}}$.

Обозначим порядок группы $\mathfrak{G}/D_n$ (или мощность множества ее элементов) $\varphi_n(k)$.

Известно, что $\varphi_2(k)$, $\varphi_3(k)$ и $\varphi_4(k)$ конечны ([3,4]).

Проблема Бернсайда формулируется теперь так: конечно или бесконечно $\varphi_n(k)$?

$$\varphi_2(k) = 2^k.$$

Леви и Ван-дер-Варден ([5]) нашли

$$\varphi_3(k) = 3^{\frac{k^3 + 5k}{6}}.$$

Оказывается, для n составных можно дать оценки $\varphi_n(k)$ снизу, пользуясь теоремой Шрайера.

$n = 4$. $(\mathfrak{G}, D_2) = 2^k$. D_2 — свободная группа с $k_1 = 1 + 2^k(k-1)$ свободными производящими элементами.

Составим $D_2' = \{d^2, d_1^2, \ldots\}_{d_i \in D_2}$; очевидно,

$$(D_2, D_2') = 2^{k_1} = 2^{1 + 2^k(k-1)}, \quad D_4 \subset D_2' \subset D_2 \subset \mathfrak{G}.$$

Поэтому

$$(\mathfrak{G}, D_4) = (\mathfrak{G}, D_2)(D_2, D_2')(D_2', D_4) \geqslant 2^k 2^{1 + 2^k(k-1)} = 2^{1 + k + 2^k(k-1)}.$$

Итак,

$$\varphi_4(k) \geqslant 2^{1 + k + 2^k(k-1)}.$$

В частности, $\varphi_4(2) \geqslant 2^7 = 128$.

$n = 6$. Рассмотрим случай $k = 2$, $\mathfrak{G} = \{a_1, a_2\}$, $D_3 = \{g^3, g_1^3, g_2^3, \ldots\}_{g_i \in \mathfrak{G}}$.

По Леви и Ван-дер-Вардену, $(\mathfrak{G}, D_3) = \varphi_3(2) = 3^3 = 27$.

Составим $D_3' = \{d^2, d_1^2, d_2^2, \ldots\}_{d_i \subset D_3}$; D_3 — свободная группа с числом производящих, по теореме Шрайера, $1 + 27\,(2 - 1) = 28$.

Поэтому $(D_3, D_3') = \varphi_2(28) = 2^{28}$, $D_6 \subset D_3' \subset D_3 \subset \mathfrak{G}$, следовательно $\mathfrak{G}/D_6$ порядка $(\mathfrak{G}, D_6) \geqslant (\mathfrak{G}, D_3)(D_3, D_3') = 27 \cdot 2^{28}$, и даже $\mathfrak{G}/D_6$ имеет факторгруппу $\mathfrak{G}/D_3'$ порядка $27 \cdot 2^{28}$.

Составим $D_2 = \{g^2, g_1^2, g_2^2, \ldots, \}_{g_i \subset \mathfrak{G}}$; D_2 — свободная группа с числом производящих $1 + 4\,(2 - 1) = 5$.

Составим $D_2' = \{d^3, d_1^3, d_2^3, \ldots\}_{d_i \subset D_2}$; по Леви и Ван-дер-Вардену,

$$(D_2, D_2') = 3^{\frac{5^3 + 5 \cdot 5}{6}} = 3^{25}, \quad D_6 \subset D_2' \subset D_2 \subset \mathfrak{G},$$

поэтому $\mathfrak{G}/D_6$ содержит факторгруппу $\mathfrak{G}/D_2'$ порядка $4 \cdot 3^{25}$. Пересечение $D' = D_2' \wedge D_3'$, по теореме Пуанкаре ([6]), тоже имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}$, обозначим его j. Кроме того, D' является нормальным делителем $\mathfrak{G}$ и $D_6 \subset D'$. Отсюда $\mathfrak{G}/D_6$ имеет факторгруппу $\mathfrak{G}/D'$ конечного порядка j, а эта факторгруппа сама имеет факторгруппы $\mathfrak{G}/D_3'$ и $\mathfrak{G}/D_2'$ порядков соответственно $3^3 \cdot 2^{28}$ и $2^2 \cdot 3^{25}$.

Поэтому $3^3 \cdot 2^{28} \mid j$ и $2^2 \cdot 3^{25} \mid j$, а следовательно, $2^{28} \cdot 3^{25} \mid j$, $j \geqslant 2^{28} \cdot 3^{25}$. Отсюда $\varphi_6(2) \geqslant 2^{28} \cdot 3^{25} = 8 \cdot 6^{25}$.

Таким же путем можно вывести неравенства $\varphi_8(2) \geqslant 2^{136}$, $\varphi_9(2) \geqslant 3^{3685}$, $\varphi_{10}(2) \geqslant 2 \cdot 10^{11}$.

$\varphi_{2^i}(2) \geqslant 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$, здесь двойки входят $i + 1$ раз.

Поступило
17 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Теория групп, 1944. [2] O. Schreier, Hamb. Abh., **5** (6) (1927). [3] W. Burnside, Quart. J., **33**, 230 (1902). [4] И. Н. Санов, Уч. зап. ЛГУ, **55**, 166 (1940). [5] F. Levi u. B. L. Van der Waerden, Hamb. Abh., **9**, 154 (1932). [6] H. Poincaré, J. de Math., sér. 4, 3, 409 (1887).