

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. В. КИСУНЬКО

**К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В ТРУБАХ СО СКАЧКООБРАЗНО МЕНЯЮЩИМСЯ СЕЧЕНИЕМ**

(Представлено академиком Б. А. Введенским 19 VII 1947)

1. В настоящей работе мы рассмотрим задачу о распространении электромагнитных (э. м.) волн в полостях идеально проводящих цилиндрических труб при наличии в них скачкообразных изменений формы, размеров и связности поперечного сечения цилиндра с сохранением направления его образующих. Эта задача непосредственно связана с вопросом об условиях прохождения э. м. волн без отражения через стык между двумя волноводами или через комбинации стыков в виде диафрагм, трансформаторов и т. п. устройств. В литературе последовательное электродинамическое рассмотрение данного вопроса имеется пока лишь для одного частного случая<sup>(1)</sup>, относящегося к прохождению простейшей *H*-волны через круглое отверстие в центральной части поперечного экрана, помещенного в круглый волновод. В других работах<sup>(2)</sup> нерегулярный волновод заменяется „эквивалентной“ линией со скачкообразно меняющимся волновым сопротивлением, однако подобные упрощенные аналогии, предполагающие возможность исчерпывающего определения электрических параметров стыка двух труб через „волновые сопротивления“ каждой из них, при ближайшем рассмотрении оказываются незаконными.

2. Прежде чем рассматривать нерегулярный волновод, представим напряженности **E** и **H** э. м. поля в каждом его регулярном отрезке разложенными в ряды по характеристическим функциям, удовлетворяющим граничным условиям на боковой поверхности цилиндра. Для этого мы обобщим полученные ранее<sup>(3)</sup> разложения на случай полицилиндрического волновода с неодносвязным сечением  $S_{\perp}$ , заполненного однородной изотропной средой с произвольными  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{\mu}$  и  $\sigma$ . Введя декартовы координаты *x*, *y*, *z* с направлением **z** вдоль образующих трубы, можно написать:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_a e_a(z, t) \mathbf{A}_a(x, y) \equiv \sum_{\nu} e_{l\nu} \mathbf{A}_{l\nu} + \sum_q e_q \mathbf{A}_q, \\ \mathbf{H} &= \sum_b h_b(z, t) \mathbf{B}_b(x, y) \equiv \sum_{\mu} h_{l\mu} \mathbf{B}_{l\mu} + \sum_q h_q \mathbf{B}_q'. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{A}_{l\nu} = \Phi_{\nu}(x, y) \mathbf{z}$  и  $\mathbf{B}_{l\mu} = \Phi_{\mu}(x, y) \mathbf{z}$  — „продольные“ собственные векторы волновода ( $\Phi_{\nu}$  и  $\Phi_{\mu}$  — собственные функции мембранных задач для области  $S_{\perp}$  с условиями  $\Phi_{\nu} = 0$  и  $\partial\Phi_{\mu}/\partial n = 0$  на ее гра-

нице  $s$ );  $\mathbf{A}_q$  и  $\mathbf{B}_q$  — перпендикулярные  $\mathbf{z}$  собственные векторы двумерных внутренних задач на  $S_{\perp}$ :

$$\Delta_{\perp} \mathbf{A}_q + \kappa_q^2 \mathbf{A}_q = 0, \quad \mathbf{A}_q \cdot \mathbf{s} = 0 \text{ на } s; \quad \Delta_{\perp} \mathbf{B}_q + \kappa_q^2 \mathbf{B}_q = 0, \quad \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } s, \quad (2)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , а  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{s}$  — соответственно нормальный и касатель-

ный к  $s$  единичные векторы. Очевидно, что все потенциальные векторы  $\mathbf{A}_q$  и  $\mathbf{B}_q$  могут быть исчерпаны функциями  $\mathbf{A}_{g\epsilon} = N_{\epsilon} \nabla \Phi_{\epsilon}$  и  $\mathbf{B}_{g\mu} = N_{\mu} \nabla \Phi_{\mu}$ , где  $N_{\epsilon, \mu}$  — нормирующие множители, а  $\Phi_{\epsilon, \mu}$  — полные системы собственных функций двумерных внутренних задач на  $S_{\perp}$ :

$$\Delta_{\perp} \Phi_{\epsilon, \mu} + \kappa_{\epsilon, \mu}^2 \Phi_{\epsilon, \mu} = 0, \quad \partial \Phi_{\epsilon} / \partial s = 0 \text{ на } s, \quad \partial \Phi_{\mu} / \partial n = 0 \text{ на } s. \quad (3)$$

После этого, используя вытекающие из (2) соотношения  $\mathbf{A}_q = [\mathbf{B}_q \mathbf{z}]$  и  $\mathbf{B}_q = [\mathbf{z} \mathbf{A}_q]$ , получим и вихревые собственные функции  $\mathbf{A}_{c\mu} = [\mathbf{B}_{g\mu} \mathbf{z}] = \text{rot}(N_{\mu} \Phi_{\mu} \mathbf{z})$  и  $\mathbf{B}_{c\epsilon} = [\mathbf{z} \mathbf{A}_{g\epsilon}] = -\text{rot}(N_{\epsilon} \Phi_{\epsilon} \mathbf{z})$ .

Полученные таким образом системы векторов  $\mathbf{A}_a$  и  $\mathbf{B}_b$  могут быть нормированы и в необходимых случаях ортогонализированы так, чтобы

$$\int_{S_{\perp}} \mathbf{A}_a \mathbf{A}_{a'} dS = \begin{cases} 1 (a' = a) \\ 0 (a' \neq a) \end{cases}, \quad \int_{S_{\perp}} \mathbf{B}_b \mathbf{B}_{b'} dS = \begin{cases} 1 (b' = b) \\ 0 (b' \neq b) \end{cases}. \quad (4)$$

Для этого, в частности, следует положить

$$N_{\epsilon, \mu} = \left[ \kappa_{\epsilon, \mu}^2 \int_{S_{\perp}} \Phi_{\epsilon, \mu}^2 dS + \oint_s \Phi_{\epsilon, \mu} \frac{\partial \Phi_{\epsilon, \mu}}{\partial n} ds \right]^{-1/2}, \quad \int_{S_{\perp}} \Phi_{\nu}^2 dS = 1. \quad (5)$$

Если не считать  $\Phi_{\epsilon} = \text{const}$ , для которой собственный параметр  $\kappa_{\epsilon} = 0$  и  $\mathbf{A}_q \equiv 0$  и  $\mathbf{B}_q \equiv 0$ , то система функций  $\Phi_{\epsilon}$  для односвязного сечения  $S_{\perp}$  исчерпывается мембранными  $\Phi_{\nu}$ , и мы приходим к рассмотренному в работе (3) случаю. При неодносвязном же сечении, заключенном между замкнутыми контурами  $s_1, s_2, \dots, s_m$  и охватывающим их общим контуром  $s_0$ , к функциям  $\Phi_{\epsilon}$ , кроме  $\Phi_{\nu}$ , принадлежит  $m$  линейно независимых  $\Phi_{\lambda}$ , которые соответствуют собственному значению  $\kappa_{\epsilon} = 0$ , т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа на области  $S_{\perp}$  и принимают заданные постоянные значения на граничных контурах.

Дифференциальные уравнения для  $e_a$  и  $h_b$  найдем из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\bar{\epsilon}}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{ст}}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\bar{\mu}}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (6)$$

умножая их соответственно на  $\mathbf{A}_a$  и  $\mathbf{B}_b$  (скалярно) и интегрируя по объему цилиндра, ограниченного сечениями  $z$  и  $z + dz$ . Введя в левые части  $\text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и преобразуя их с учетом граничных условий на боковой поверхности цилиндра, получим:

$$\int_{S_{\perp}} \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A}_a dS - \frac{\partial}{\partial z} \int_{S_{\perp}} \mathbf{H} [\mathbf{z} \mathbf{A}_a] dS = \frac{\bar{\epsilon}}{c} \frac{\partial e_a}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma e_a}{c} + J_a, \quad (7)$$

$$\int_{S_{\perp}} \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{B}_b dS + \frac{\partial}{\partial z} \int_{S_{\perp}} \mathbf{E} [\mathbf{B}_b \mathbf{z}] dS = -\frac{\bar{\mu}}{c} \frac{\partial h_b}{\partial t}; \quad J_a = \frac{4\pi}{c} \int_{S_{\perp}} \mathbf{j}^{\text{ст}} \mathbf{A}_a dS$$

или в развернутом виде, учитывая свойства  $A_a$  и  $B_b$ ,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{hc_v}{N_v} &= \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi\sigma \right) \frac{e_{lv}}{c} + J_{lv} & N_\varepsilon \gamma_\varepsilon^2 e_{le} - \frac{\partial e_{g\varepsilon}}{\partial z} &= \frac{\bar{\mu}}{c} \frac{\partial h_{c\varepsilon}}{\partial t} \\ -\frac{\partial h_{c\varepsilon}}{\partial z} &= \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi\sigma \right) \frac{e_{g\varepsilon}}{c} + J_{g\varepsilon} & -\frac{\partial e_{c\mu}}{\partial z} &= \frac{\bar{\mu}}{c} \frac{\partial h_{g\mu}}{\partial t} \\ N_\mu \gamma_\mu^2 h_{l\mu} - \frac{\partial h_{g\mu}}{\partial z} &= \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi\sigma \right) \frac{e_{c\mu}}{c} + J_{c\mu} & -\frac{e_{c\mu}}{N_\mu} &= \frac{\bar{\mu}}{c} \frac{\partial h_{l\mu}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Не входя в подробности вопроса о возбуждении волновода, мы ограничимся случаем, когда в рассматриваемом объеме сторонний ток  $j^{ст} = 0$ . Кроме того, будем считать все величины зависящими от времени по закону  $e^{-i\omega t}$ . Тогда, исключая из (8)  $h_{l\mu}$  и  $e_{le}$  и обозначая для краткости комплексные амплитуды  $e_{c\mu, g\varepsilon} = e_{\mu, \varepsilon}$ ,  $h_{g\mu, c\varepsilon} = h_{\mu, \varepsilon}$ , получим:

$$\frac{\partial e_q}{\partial z} = i\gamma_q Z_q h_q, \quad Z_q \frac{\partial h_q}{\partial z} = i\gamma_q e_q, \quad Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\eta} \frac{\gamma_\varepsilon}{k}}, \quad Z_\mu = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\eta} \frac{k}{\gamma_\mu}}, \quad (9)$$

$$\gamma_q = \sqrt{k^2 - \alpha_q^2} \quad (\text{Im } \gamma_q > 0); \quad k^2 = \eta \bar{\mu} \frac{\omega^2}{c^2}; \quad \eta = \bar{\varepsilon} + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (10)$$

Составляя из  $e_q$  и  $h_q$  матричные функции  $e$  и  $h$  с одним столбцом, а из  $\gamma_q$  и  $Z_q$  — диагональные матрицы  $\gamma$  и  $Z$ , можно написать уравнения (9) в матричной форме:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = i\gamma Z h, \quad Z \frac{\partial h}{\partial z} = i\gamma e, \quad (11)$$

откуда, аналогично обычным уравнениям передающей линии,

$$e = \mathcal{E}^+ e^{i\gamma z} + \mathcal{E}^- e^{-i\gamma z}, \quad h = Z^{-1} (\mathcal{E}^+ e^{i\gamma z} - \mathcal{E}^- e^{-i\gamma z}), \quad (12)$$

где  $e^{\pm i\gamma z} = \|\delta_{qq'} e^{\pm i\gamma q z}\|$ , а  $\mathcal{E}^\pm$  — неопределенные матричные постоянные, которые должны определяться из граничных условий на концах трубы.

3. Предположим, что плоскость  $z=0$  является плоскостью стыка между двумя полубесконечными волноводами с сечениями  $S_{1\perp} (z < 0)$  и  $S_{2\perp} (z > 0)$ . Чтобы не усложнять задачу, будем считать, что на стыке все точки  $S_{1\perp}$  принадлежат так же  $S_{2\perp}$ , а разностная область  $S_{2\perp} - S_{1\perp}$  закрыта идеально проводящей перегородкой, соединяющей внешние цилиндрические поверхности волноводов. Напишем граничные условия на стыке в виде:

$$(E - E_z \hat{z})_{z=0} = (E - E_z \hat{z})_{z=+0} \text{ на } S_{2\perp} (=0 \text{ на } S_{2\perp} - S_{1\perp}), \quad (13)$$

$$(H - H_z \hat{z})_{z=0} = (H - H_z \hat{z})_{z=+0} \text{ на } S_{1\perp}. \quad (14)$$

Представляя поля в обоих волноводах с помощью формул (1) и умножая (13) поочередно на  $A_{q_1}$  и  $A_{q_2}$ , проинтегрируем полученные выражения соответственно по  $S_{1\perp}$  и  $S_{2\perp}$ ; кроме того, умножим (14) на  $B_{q_1}$  и проинтегрируем по  $S_{1\perp}$ :

$$\begin{aligned} e_{q_1} &= \sum_{q_2} M_{q_1 q_2} e_{q_2}; \quad e_{l_2} = \sum_{q_1} M_{q_1 q_2} e_{q_1}; \\ h_{q_1} &= \sum_{q_2} M_{q_1 q_2} h_{l_2}; \quad M_{q_1 l_2} = \int_{S_{1\perp}} A_{q_1} A_{q_2} dS \end{aligned} \quad (15)$$

(здесь индексы 1,2 относятся к 1 и 2 волноводам). Эти условия можно написать в виде:

$$\mathcal{E}_{q_1}^+ + \mathcal{E}_{q_1}^- = \sum_{q_2} M_{q_1 q_2} (\mathcal{E}_{q_2}^+ + \mathcal{E}_{q_2}^-); \quad \mathcal{E}_{q_2}^+ + \mathcal{E}_{q_2}^- = \sum_{q_1} M_{q_1 q_2} (\mathcal{E}_{q_1}^+ + \mathcal{E}_{q_1}^-); \quad (16)$$

$$\mathcal{E}_{q_1}^+ - \mathcal{E}_{q_1}^- = \sum_{q_2} M_{q_1 q_2} \frac{Z_{q_2}}{Z_{q_1}} (\mathcal{E}_{q_2}^+ - \mathcal{E}_{q_2}^-). \quad (17)$$

В простейшем случае, когда  $\mathcal{E}_{q_2}^- = 0$  (т. е. первичные волны подходят к стыку по меньшей трубе и после перехода через стык распространяются в большей трубе без отражения), исключая  $\mathcal{E}_{q_1}^+$  из (16) и (17), получим:

$$\mathcal{E}_{q_1}^+ - \mathcal{E}_{q_1}^- = \sum_{q_1'} \sum_{q_2} M_{q_1 q_2} M_{q_1' q_2} \frac{Z_{q_2}}{Z_{q_1}} (\mathcal{E}_{q_1'}^+ + \mathcal{E}_{q_1'}^-), \quad (18)$$

или в матричной форме ( $I$  — единичная матрица)

$$\mathcal{E}_1^- = \frac{I - g^{(1)}}{I + g^{(1)}} \mathcal{E}_1^+ \equiv p^{(1)} \mathcal{E}_1^+; \quad g^{(1)} = \left\| \sum_{q_2} M_{q_1 q_2} M_{q_1' q_2} \frac{Z_{q_2}}{Z_{q_1}} \right\|. \quad (19)$$

Очевидно, что матрицы  $p^{(1)}$  и  $g^{(1)}$  имеют смысл, соответственно, коэффициента отражения и безразмерной проводимости второго волновода относительно первого.

Считая  $p^{(1)}$  в первом приближении диагональной матрицей, имеем:

$$p_{qq}^{(1)} = \frac{1 - g_{qq}^{(1)}}{1 + g_{qq}^{(1)}}. \quad (20)$$

Для волноводов простейших форм  $g_{q_1}^{(1)}$  вычисляются без особых затруднений. Например, для показанных на рисунке стыков при  $\eta = \mu = 1$  имеем следующие хорошо сходящиеся ряды:

$$g_{H_{10}}^{(1)} = \frac{b}{B} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi n b}{B}}{\pi n b / B} \right)^2 \sqrt{\frac{k^2 - \pi^2 / a^2}{k^2 - \pi^2 / a^2 - \pi^2 n^2 / B^2}} \right], \quad (21)$$

$$g_{TEM}^{(1)} = \frac{2}{\ln \frac{R}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2 - \epsilon_{0n}^2 / R^2}} \left[ \frac{J_0 \left( \epsilon_{0n} \frac{r}{R} \right)}{\epsilon_{0n} J_1(\epsilon_{0n})} \right]^2; \quad J_0(\epsilon_{0n}) = 0. \quad (22)$$

Для случая, обратного предыдущему, положив  $\mathcal{E}_{q_2}^+ = 0$ , из (16) и (17) получим:

$$\mathcal{E}_2^+ = \frac{K^{(2)} - I}{K^{(2)} + I} \mathcal{E}_2^- \equiv p^{(2)} \mathcal{E}_2^-; \quad K^{(2)} = \left\| \sum_{q_1} M_{q_1 q_2} M_{q_1' q_2} \frac{Z_{q_1}}{Z_{q_1'}} \right\|. \quad (23)$$

Здесь  $K^{(2)}$  имеет смысл безразмерного импеданса первого волновода относительно второго. Существенно, что для определения  $p^{(1,2)}$  кроме „характеристических импедансов“  $Z_{q_1}$  и  $Z_{q_2}$ , надо знать  $M_{q_1 q_2}$ , зависящие от перекрытия собственных функций волноводов на апертуре стыка.

Военная Краснознаменная  
Академия связи им. С. М. Буденного

Поступило  
19 VII 1947

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> М. И. Конторович, ЖТФ, 17, 269 (1947). <sup>2</sup> J. C. Slater, Microwave Transmission, ch. 4, N. Y. — L., 1942. <sup>3</sup> Г. В. Кисунько, ДАН, 51, 195 (1946); ЖТФ, 16, 565 (1946).

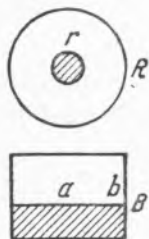


Рис. 1