Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 8

МАТЕМАТИКА

А. ПОВЗНЕР

О СПЕКТРЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1947)

В работе дается новое определение спектра ограниченных непрерывных функций и рассматриваются некоторые вопросы апроксимации функций тригонометрическими полиномами с показателями из ее спектра.

Определение спектра, аналогичное нашему (если не считать неймановской конструкции среднего), было дано в работе A. Beurling'a [1], послужившей толчком для написания настоящей статьи.

Обозначения: L_1 — пространство функций f с $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$; S — пространство ограниченных, непрерывных на всей оси функций.

P — класс функций $p(x)$, удовлетворяющих следующим требованиям: 1) $p(-x)=p(x)>0$; 2) $p(x)$ непрерывна и не убывает при $x>0$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)=\infty$; 4) если $x,\tau>0$, то существует такая функция $M(\tau)$, что $p(x+\tau)\leqslant M(\tau)\,p(x)$.

D_p — пространство S с метрикой

$$\|\varphi\|=\operatorname{supr}_{|x|<\infty}\left|\frac{\varphi(x)}{p(x)}\right|,\quad p\subset P.$$

Линейное подпространство $T\subset S$ мы будем называть p-инвариантным, если оно замкнуто в D_p и из $\varphi(x)\subset T$ следует $\varphi(x+\tau)\subset T$ при любом τ.

Лемма 1. *Линейное подпространство $T\subset S$ тогда и только тогда p-инвариантно, если оно замкнуто в D_p и из $h(t)\subset L_1$, $\varphi(t)\subset T$ следует $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-x)\,h(x)\,dx\subset T$.*

Теорема 1. *Пусть T p-инвариантное пространство, не совпадающее с S. Для всякого элемента $f\subset S$, не принадлежащего T, существует такая функция $h\subset L_1$, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t)f(-t)\,dt\neq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t)\varphi(-t)\,dt=0$, если $\varphi\subset T$.*

Доказательство. Так как $f\subset T$, то при некотором $h_0\subset L_1$ $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_0(s)f(x-s)\,ds\,\overline{\subset}\,T$.

Из теоремы Hahn'a — Banach'a и общего вида линейного функционала в D_p [2] следует, что найдется такая функция $v(x)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-x)\,dv(x)=0 \quad (\varphi \subset T), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-x)\,dv(x) \neq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,|dv(x)| < \infty .$$

Положим $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(x-s)\,dv(s)$. Так как $p(0) \int_{-\infty}^{\infty} |dv(x)| < \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,|dv(x)|$, то $h(x) \subset L_1$.

Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\,h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-s)\,dv(s) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(-s)\,dv(s) \neq 0$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-t)\,h(t)\,dt = 0$$

по лемме 1, если $\varphi \subset T$.

Пусть $\varphi \subset S$, $h \subset L_1$. Положим $h \circ \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\,h(t)\,dt$. Очевидно, $h \circ \varphi \subset S$. Обозначим через $H(T)$ совокупность элементов из L_1, удовлетворяющих условию $h \circ \varphi = 0$ при любом $\varphi \subset T$ (T — некоторое подмножество S). Если в L_1 ввести умножение, положив $h_1 \circ h_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x-t)\,h_2(t)\,dt$, то $H(T)$ образует замкнутый идеал в кольце L_1.

Лемма 2. *Если T есть p-инвариантное пространство и $T \neq S$, то $H(T)$ не пусто.*

Доказательство следует из теоремы 1.

Теорема 2. *Если T p-инвариантное пространство, $\varphi \subset T$ и $\varphi \circ h = 0$ при любом $h \subset H(T)$, то $\varphi \subset T$.*

Доказательство следует из теоремы 1.

Пусть $\varphi(x) \subset S$. Замыкание линейной оболочки функции $\varphi(x+\tau)$ в метрике D_p обозначим через $T_{\varphi,p}$.

Лемма 3. *$T_{\varphi,p}$ есть p-инвариантное пространство.*

Назовем p-спектром функции φ множество $\mathfrak{N}_{\varphi,p}$ значений λ, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} h(t)\,dt = 0$ при любом $\lambda \subset H(T_{\varphi,p})$.

Теорема 3. *Если λ принадлежит p-спектру, то $e^{i\lambda x} \subset T_{\varphi,p}$.*

Доказательство следует из теоремы 2.

Теорема 4. *p-спектр любой функции $\varphi \subset S$ не пуст.*

Из тауберовской теоремы N. Wiener'a следует, что если H — замкнутый идеал в L_1 и $H \neq L_1$, то найдется такое λ, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} h(t)\,dt \neq 0$ для всех $h \subset H$. Эта теорема, примененная к $H(T_{\varphi,p})$, дает доказательство теоремы 4.

Теорема 5. *Пересечение $\mathfrak{N}_\varphi$ всех множеств $\mathfrak{N}_{\varphi, p}$, $p \subset P$, не пусто. Найдется такое $q \subset P$, что $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}_{\varphi, q}$. Множество $\mathfrak{N}_q$ замкнуто.*

Мы будем называть множество $\mathfrak{N}_\varphi$ $H - B$-спектром функции φ.

Следствие. Если λ принадлежит $H - B$ спектру, то $e^{i\lambda t}$ принадлежит замыканию линейной оболочки функций $\varphi(t+\tau)$ в любой метрике D_p.

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое замкнутое множество действительных чисел. Идеал из L_1, состоящий из всех функций h, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} h(t)\,dt = 0$, $\lambda \subset \mathfrak{N}$, обозначим через $H_{\mathfrak{N}}$. Обозначим, далее, через $\mathfrak{N}(J)$ множество точек λ, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} h(t)\,dt = 0$ при любом $h \subset J$ (J — идеал L_1). Обозначим через H_φ совокупность функций $h \subset L_1$, для которых $h \circ \varphi = 0$.

Лемма 4.

$$\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}(H_\varphi).$$

В дальнейшем нас будет интересовать следующая

А-проблема. Апроксимируется ли заданная функция $\varphi \subset S$ в любом D_p последовательностью тригонометрических сумм вида

$$\sigma_{n, p} = \sum_{k=1}^{m_{n, p}} C_{n, p}^{k} e^{i\lambda_{k, n, p} t},$$

где $\lambda_{k, n, p} \subset \mathfrak{N}_\varphi$.

Теорема 6. *Для того чтобы А-проблема имела утвердительное решение, необходимо и достаточно, чтобы $H_\varphi = H_{\mathfrak{N}_\varphi}$.*

А-проблема тесно связана с проблемой, которую можно назвать общей задачей тауберовского типа:

Т-проблема. Совпадает ли заданный замкнутый идеал $J \subset L_1$ с $H_{\mathfrak{N}(J)}$?

Справедлива следующая

Теорема 7. *Если Т-проблема имеет утвердительный ответ для любого замкнутого идеала J, то А-проблема имеет утвердительный ответ для любой $\varphi \subset S$, и наоборот.*

В ([3]) Диткин показал, что если граница множества $\mathfrak{N}(J)$ есть приводимое множество, то $J = H_{\mathfrak{N}(J)}$.

Из этой теоремы и теоремы 6 следует:

Теорема 8. *Если граница $\mathfrak{N}_\varphi$ есть приводимое множество, то А-проблема имеет положительное решение для функции φ.*

Назовем спектром Hahn'a — Bochner'a функции φ множество точек λ, для которых не существует такой окрестности Δ_λ, что $E(\lambda)\varphi$ является линейной функцией в Δ_λ, где $E(\lambda)\varphi$ — второе обобщенное преобразование Фурье функции φ ([4]).

Теорема 9. *$H - B$-спектр функции φ совпадает с ее спектром Hahn'a — Bochner'a*.*

Теорема 10. *Если $\lambda \subset \mathfrak{N}_\varphi$ и Δ_λ — некоторая окрестность точки λ, то $\varphi(x)$ невозможно апроксимировать в любом D_p тригонометрическими суммами с показателями, не содержащимися в Δ_λ.*

---

* В. Марченко доказал, что если $\varphi(x)$ равномерно непрерывна, то ее спектр в смысле Beurling'a совпадает с ее $H - B$-спектром.

Теорема 11. *Если Δ — любое открытое множество, содержащее $\mathfrak{N}_\varphi$, и граница Δ приводима, то φ можно апроксимировать в любом D_p тригонометрическими суммами с показателями из Δ.*

Укажем еще на следующее предложение, на котором основано доказательство теоремы 6.

Теорема 12. *Для того чтобы при любом p функция φ содержалась в $T_{\psi, p}$, необходимо и достаточно, чтобы $H_\psi \subset H_\varphi$.*

Следствие. Для того чтобы при любом p выполнялись одновременно соотношения $\varphi \subset T_{\psi, p}$, $\psi \subset T_{\varphi, p}$, необходимо и достаточно, чтобы $H_\psi = H_\varphi$.

Все указанные результаты легко обобщаются на случай ограниченных измеримых функций и функций φ, растущих как некоторая степень x.

Поступило
10 XI 1945

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Beurling, Acta Math., 77 (1945). [2] R. P. Boas and S. Bochner, Ann. of Mathemat., 39, No. 2 (1938). [3] В. А. Диткин, Уч. зап. МГУ, в. 30, кн. 3 (1939). [4] S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, 1932.