Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 8

МАТЕМАТИКА

П. П. КУФАРЕВ

К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 III 1947)

Здесь сообщаются основные из результатов, полученных мной при исследовании некоторых специальных классов однолистных функций.

Пусть $\theta(t)$ — функция, имеющая на сегменте $t_0 \leqslant t \leqslant T^*$ непрерывную производную, и $\theta(t_0) = \pi$*.

1. Существует интервал $t_0 < t < T$, $T \leqslant T^*$, такой, что система уравнений:

$$\log \frac{\mu(t)}{\mu(t_0)} = 3 \log \frac{a(t)}{a(t_0)} + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t} \log \frac{\omega_1(t,\tau)}{\omega_2(t,\tau)}\, d\theta(\tau),$$

$$\log \frac{a(t)}{a(t_0)} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mu(t) + a(t)}{\mu(t) - a(t)}\, dt, \tag{1}$$

$$\log \frac{\omega_k(t,\tau)}{\mu(\tau)} = \int_{\tau}^{t} \frac{\mu(t) + \omega_k(t,\tau)}{\mu(t) - \omega_k(t,\tau)}\, dt, \quad k = 1, 2, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t,$$

имеет единственную определенную в области

$$\Delta(T): \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t \tag{2}$$

систему решений:

$$\mu(t), \quad a(t), \quad \omega_1(t,\tau), \quad \omega_2(t,\tau), \tag{3}$$

$\mu(t_0) = 1, a(t_0) = -1, \omega_k(\tau,\tau) = \mu(\tau)$, удовлетворяющих в $\Delta(T)$ при $\tau < t$ неравенствам

$$\arg \frac{\omega_1(t,\tau)}{a(t)} < \arg \frac{\mu(t)}{a(t)} < \arg \frac{\omega_2(t,\tau)}{a(t)} \tag{4}$$

и равных по модулю единице.

В дальнейшем будем считать, что $\Delta(T)$ — наибольшая из принадлежащих $\Delta(T^*)$ областей (2) существования системы (3), удовлетворяющих неравенствам (4) решений системы уравнений (1).

2. Кривая

$$L(t): \quad z = \zeta(\tau) = \xi(\tau) + i\eta(\tau) = \zeta_0 + \int_{t_0}^{\tau} e^{i\theta(\tau)} ds(\tau), \quad t_0 \leqslant \tau < t, \quad t < T, \tag{5}$$

* Мы рассматриваем простейший случай.

где

$$\zeta_0=\frac{1}{4}e^{-t_0} \tag{6}$$

и

$$s(t)=2\int_{t_0}^{t}e^{-t}|a(t)-\mu(t)|^{-3}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t}\log\left|\frac{\omega_2(t,\tau)-\mu(t)}{\omega_1(t,\tau)-\mu(t)}\right|d\theta(\tau)\right\}dt, \tag{7}$$

является гладкой; угол, образуемый с осью x касательной к $L(t)$ в точке $\zeta(\tau)$, равен $\theta(\tau)$, и длина дуги $L(\tau)$ кривой $L(t)$ равна $s(\tau)$.

3. Функция $\mu(t)$ имеет при $t_0\leqslant t<T$ непрерывную производную.

4. Пусть

$$z=\Phi(w,t),\quad \Phi(0,t)=0,\quad \Phi_w'(0,t)>0, \tag{8}$$

функция, конформно отображающая круг $|w|<1$ на область $G_z(t)$, получаемую из плоскости z проведением разреза по лучу $L_{\infty 0}$: $\arg z=0$, $\zeta_0\leqslant z\leqslant\infty$ и затем по $L(t)$.

Тогда

$$f(w,t)=\log\frac{\Phi(w,t)}{w}=-t-2\log\left(1-\frac{w}{a(t)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t}\log\left(\frac{1-\dfrac{w}{\omega_2(t,\tau)}}{1-\dfrac{w}{\omega_1(t,\tau)}}\right)d\arg\zeta(\tau), \tag{9}$$

$$\psi(w,t)=\log\Phi_w'(w,t)=-t+\log\left(1-\frac{w}{\mu(t)}\right)-3\log\left(1-\frac{w}{a(t)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t}\log\left(\frac{1-\dfrac{w}{\omega_2(t,\tau)}}{1-\dfrac{w}{\omega_1(t,\tau)}}\right)d\theta(\tau) \tag{10}$$

и

$$\Phi(w,t)=\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t}\log\left(\frac{1-\dfrac{w}{\omega_2(t,\tau)}}{1-\dfrac{w}{\omega_1(t,\tau)}}\right)d\eta(\tau)+\frac{q(t)a(t)w}{[w-a(t)]^2}+\frac{r(t)w}{w-a(t)}, \tag{11}$$

где

$$r(t)=\operatorname*{Res}_{w=a(t)}\frac{\Phi(w,t)}{w}=\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t}\log\frac{\omega_2(t,\tau)}{\omega_1(\tau,\tau)}d\eta(\tau) \tag{12}$$

и

$$q(t)=\frac{[\mu(t)-a(t)]^3}{2a(t)\mu(t)[\mu(t)+a(t)]}\left\{\frac{dr}{dt}-\frac{2\mu(t)a(t)}{[\mu(t)-a(t)]^2}r\right\}. \tag{13}$$

5. При отображении $z=\Phi(w,t)$ точки $w=\mu(t)$, $w=a(t)$, $w=\omega_k(t,\tau)$ $(k=1,2)$ переходят, соответственно, в точки $z=\zeta(t)$, $z=\infty$, $z=\zeta(\tau)$ разреза $L_{\infty 0}+L(t)$.

6. Имеет место формула:

$$\log\frac{a(t)}{a(t_0)}=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t}\log\frac{\omega_2(t,\tau)}{\omega_1(t,\tau)}\,d\arg\zeta(\tau), \tag{14}$$

и, следовательно,

$$\log\frac{\mu(t)}{\mu(t_0)}=\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t}\log\frac{\omega_2(t,\tau)}{\omega_1(t,\tau)}\,d\vartheta(\tau), \tag{15}$$

где

$$\vartheta(\tau)=\frac{3}{2}\arg\zeta(\tau)-\theta(\tau). \tag{16}$$

7. Пусть $\tilde{\mu}(t)$ — функция, имеющая на полусегменте $[t_0, T)$ непрерывную производную.

Для любого $\tau\subset(t_0, T)$ существует единственное решение $v(t,\tau)$ уравнения Ловнера

$$\frac{d\log w}{dt}=\frac{\tilde{\mu}(t)+w}{\tilde{\mu}(t)-w}, \tag{17}$$

стремящееся к $\tilde{\mu}(\tau)$ при $t\to\tau-0$ и удовлетворяющее при $t_0\leqslant t<\tau$ неравенству

$$|v(t,\tau)|<1.$$

Функция $v(t,\tau)$ имеет при $t_0\leqslant t<\tau<T$ непрерывную в t и τ производную по τ, и

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=-v(t,\tau)\frac{\tilde{\mu}(t)+v(t,\tau)}{\tilde{\mu}(t)-v(t,\tau)}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t}\left[\frac{\tilde{\mu}(x)+v(x,\tau)}{\tilde{\mu}(x)-v(x,\tau)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\tilde{\mu}(x)-v(x,\tau)}{\tilde{\mu}(x)+v(x,\tau)}\right]d\log\mu(x)\right\}. \tag{18}$$

8. Пусть $w=w(t, w_0, \tau_0)$ — интеграл уравнения (18), принимающий при $t\to\tau_0$ значение $w_0\neq\mu(\tau_0)$.

Функция

$$w=w(t, w_0, \tau_0) \tag{19}$$

при $t_0\leqslant t<\tau_0$ конформно и взаимно однозначно отображает круг $|w_0|<1$ на область, получаемую из круга $|w|<1$ проведением разреза по (гладкой) кривой:

$$C_w(t,\tau_0):\quad w=v(t,\tau),\quad t\leqslant\tau\leqslant\tau_0. \tag{20}$$

9. При $\tilde{\mu}(t)=\mu(t)$ имеют место формулы:

$$\Phi(w_0,\tau_0)=e^{\cdot t_0}\frac{w(t_0, w_0, \tau_0)}{[\mu(t_0)+w(t_0, w_0, \tau_0)]^2}, \tag{21}$$

$$\zeta(\tau)=e^{-t_0}\frac{v(t_0,\tau)}{[\mu(t_0)+v(t_0,\tau)]^2}, \tag{22}$$

$$\eta(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{t_0}^{\tau} \frac{\mu(x) + v(x,\tau)}{\mu(x) - v(x,\tau)} \, d\tau(x) \right], \tag{23}$$

$$\arg \zeta(\tau) = \operatorname{Im} \left[\int_{t_0}^{\tau} \frac{\mu(x) - v(x,\tau)}{\mu(x) + v(x,\tau)} \, d \log \mu(x) \right], \tag{24}$$

$$\vartheta(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{t_0}^{\tau} \frac{\mu(x) + v(x,\tau)}{\mu(x) - v(x,\tau)} \, d \log \mu(x) \right]. \tag{25}$$

10. Случай области $G_z(T)$, ограниченной замкнутой гладкой кривой $L(T)$, может быть рассмотрен как предельный ($t \to T - 0$).

Физико-технический институт
Томского государственного университета
им. В. В. Куйбышева

Поступило
3 III 1947