Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

О ПРИВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА К КВАДРАТУРАМ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 12 II 1947)

1. Для вязкой несжимаемой жидкости известен случай (течение в конфузоре ([1])), когда уравнения движения сводятся к квадратурам. В настоящей работе мы показываем, что и гораздо более сложная задача интегрирования уравнений движения вязкого сжимаемого газа для определенного класса случаев может быть сведена к квадратурам. При этом мы приводим уравнения пограничного слоя газа к весьма простой форме (не более сложной, чем соответственные уравнения для жидкости).

Уравнения пограничного слоя сжимаемого газа суть:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial\tau}{\partial y}; \tag{1}$$

$$\rho u=\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad \rho v=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}; \tag{2}$$

$$p=R\rho T; \tag{3}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^n. \tag{4}$$

Здесь n — экспериментальная константа; индекс 0 соответствует стенке.

Аналогично нашим сообщениям ([2,3]), введем независимые переменные

$$x \quad \text{и} \quad Y=\frac{u}{\sqrt{2c_pT_0}}.$$

Введем также зависимую переменную

$$z=\frac{1}{\sqrt{2\mu_0\sqrt{2c_pT_0}}}\,p^{-\left[\frac{n(\varkappa-1)}{\varkappa}\right]+1}\tau, \tag{5}$$

где $\varkappa=c_p/c_v$ — показатель адиабаты.

Уравнения (1) и (2) в новых независимых переменных записываются:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{dp}{dx}\frac{\mu}{\tau}+\frac{1}{\sqrt{2c_pT_0}}\frac{\partial\tau}{\partial Y};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial Y}=\frac{2c_pT_0\mu\rho Y}{\tau}.$$

Исключая из полученных уравнений неизвестную функцию Ψ, пользуясь формулами (3) и (4) совместно с интегралом энергии и выражая также τ через z по формуле (5), окончательно получаем уравнение:

$$z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} - mP' (1-Y^2)^n \frac{\partial z}{\partial Y} - PY (1-Y^2)^{n-1} \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$P = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa m}} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(1 + \frac{\varkappa-1}{2}\bar{B}^2\right)^{\frac{1}{2m}},$$

где $\bar{B}$ — число Барстоу — Маха; $m = \frac{\varkappa - 1}{2[(2n+1)\varkappa - 2n]} = 0{,}100$ (так как для воздуха $\varkappa = 1{,}4$ и $n = 0{,}76$).

2. Прежде всего изучим класс внутренних решений, определяемых подстановкой Фурье $z = A(x) B_n(Y)$.

Полагая

$$\frac{mP'}{A^3} = -\alpha, \tag{*}$$

$$\frac{P}{2}\left(\frac{1}{A^2}\right)' = 2n\alpha, \tag{**}$$

где α — некоторая константа, получаем уравнение для определения $B_n(Y)$:

$$B_n^2 \frac{d^2 B_n}{dY^2} + \alpha (1-Y^2)^n \frac{dB_n}{dY} + 2n\alpha Y (1-Y^2)^{n-1} B_n = 0.$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах. Первая квадратура дает

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dB_n}{dY} = \frac{(1-Y^2)^n}{B_n} + \mathrm{const}.$$

Произвольная постоянная равна нулю согласно граничному условию на стенке.

Производя вторую интеграцию, получаем, что решение в окрестности стенки выражается формулой

$$B_n(Y) = \sqrt{B_{n_0}^2 + 2\alpha \int_0^Y (1-Y^2)^n \, dY}. \tag{7}$$

3. Определим теперь, какому распределению давлений соответствует рассмотренный случай. Сопоставляя (*) и (**) и пользуясь также связью между P и p, находим, что полученное решение соответствует распределению давлений по гиперболическому закону

$$p = \frac{1}{ax+b}, \tag{8}$$

где a и b — некоторые постоянные коэффициенты.

Заметим, что изученный класс случаев интересен не только сам по себе, но и как возможное основание для рассмотрения общей теории. Действительно, коль скоро заданная кривая распределения давлений есть $p(x)$, то, заменяя график кривой $1/p(x)$ полигоном вида

$$\frac{1}{p(x)}=a_i x+b_i,$$

для каждой из сторон которого можно пользоваться результатами полученного частного решения, мы, аналогично методу Ховардса, получим внутреннее решение для общего случая течения неадиабатического газа.

4. Методы настоящей работы, так же как и работ ([2],[3]), могут быть обобщены и на случаи обтекания тел вращения. Ограничиваясь для простоты случаем несжимаемой жидкости, получаем, вводя независимые переменные x и u и зависимую переменную

$$z=\frac{\tau}{\sqrt{\mu\rho}\,r(x)} \tag{9}$$

(здесь $r(x)$ — уравнение поверхности тела вращения), следующее уравнение для z

$$z^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{1}{r^2(x)}\left(u\frac{\partial z}{\partial x}+\bar{u}\bar{u}'\frac{\partial z}{\partial u}\right)=0$$

здесь $\bar{u}$ — значение u на границе слоя).

Переходя далее к независимым переменным x и $\xi=u(x,y)/\bar{u}(x)$, получаем уравнение

$$z^2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-a(x)(1-\xi^2)\frac{\partial z}{\partial\xi}-b(x)\xi\frac{\partial z}{\partial x}=0; \tag{10}$$

здесь $a(x)=\bar{u}^2\bar{u}'/r^2(x)$; $b(x)=\bar{u}^3/r^2(x)$.

Не рассматривая вопросов интегрирования уравнения (10) в общем случае, покажем, что существует случай, когда уравнение (10) сводится к квадратурам.

Положив $z=\bar{u}^2M(\xi)$, получаем для определения $M(\xi)$ уравнение

$$M^2\frac{d^2M}{d\xi^2}+k\left[(1-\xi^2)\frac{dM}{d\xi}+2\xi M\right]=0, \tag{11}$$

где постоянная k определяется формулой

$$k=\frac{\bar{u}'}{\bar{u}^2 r}. \tag{12}$$

Квадратура уравнения (11) дает

$$M(\xi)=\sqrt{2k}\sqrt{\frac{2}{3}-\xi+\frac{\xi^3}{3}}. \tag{13}$$

Из условия (12) определяется связь между распределением потенциальных скоростей и уравнением поверхности вращения

$$\bar{u}=\frac{1}{c-k\int r\,dx}. \tag{14}$$

Заметим, что если $r=\mathrm{const}$, то получаем уже известный случай плоского конфузора.

5. Покажем, что для области больших скоростей можно получить еще одну квадратуру уравнения (6).

В этой области имеем $Y \cong \overline{Y}$ (где $\overline{Y}$ — значение Y на границе слоя); вводя безразмерную переменную

$$Y_1 = Y/\overline{Y},$$

приводим уравнение (6) к виду

$$z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial Y_1^2} + (1-\overline{Y}^2)^{n-1} \{ [P Y^2 \overline{Y}' \overline{Y}_1^2 - mP' \overline{Y} (1-Y_1^2)] \frac{\partial z}{\partial Y_1} -$$

$$- P \overline{Y}^3 Y_1 \frac{\partial z}{\partial x} \} = 0.$$

Но

$$P = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} (1-\overline{Y}^2)^{-1/2n},$$

и окончательно уравнение записывается

$$z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial Y_1^2} + P\overline{Y}^2 (1-\overline{Y}^2)^{n-1} \left[\overline{Y}' (Y_1^2 - 1) \frac{\partial z}{\partial Y_1} - \overline{Y} Y_1 \frac{\partial z}{\partial x} \right] = 0. \quad (15)$$

Будем искать решение в форме Фурье

$$z = Y^2 L(Y_1).$$

Полагая

$$\frac{P(1-\overline{Y}^2)^{n-1} \overline{Y}'}{\overline{Y}^2} = -k,$$

получаем уравнение

$$L^2 \frac{d^2 L}{d Y_1^2} + k \left[(1-Y_1^2) \frac{dL}{dY_1} + 2 Y_1 L \right] = 0, \quad (16)$$

которое в точности совпадает с уравнением (11) и аналогично ему интегрируется в квадратурах:

$$L \frac{dL}{dY_1} = k(1-Y_1^2) + \text{const}$$

и т. д.

Поступило
12 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Pohlhausen, ZAMM, I (1921) [2] А. М. Файнзильбер, ДАН, 48, № 7 (1945). [3] А. М. Файнзильбер, ДАН, 48, № 8 (1945).