Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК

О ВЫРАЖЕНИИ L-РЯДОВ ЧЕРЕЗ ζ-ФУНКЦИЮ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 II 1947)

1. Пусть дан специальный ряд Дирихле:

$$A(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^w}, \tag{1}$$

сходящийся при $\mathrm{Re}\, w<K_0$. Пусть $\chi(n)$ — примитивный характер $(\mathrm{mod}\, D)$. Тогда оператор L_χ, дающий результат $L_\chi(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^w}\chi(n)$, абсолютно сходящийся при $\mathrm{Re}\, w>K_0+1$, приводит нас к аналогу L-ряда:

$$A(w,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^w}\chi(n). \tag{2}$$

Этот оператор приложим к любому ряду вида (1), и если $A(w)$ и $B(w)$ два ряда этого вида, то

$$L_\chi(A\cdot B)=L_\chi(A)\cdot L_\chi(B). \tag{3}$$

Однако понятие об операторе L_χ можно перенести и на более широкий вид функций. При этом мы получим довольно интересные формулы, выражающие $L(w,\chi)$ и $\frac{L'}{L}(w,\chi)$ через $\zeta(w)$ и $\frac{\zeta'}{\zeta}(w)$ и суммы по простым числам в прогрессии через нули одной только ζ-функции.

2. Если $N>0$ — любое число, то ряд $A(w,\chi,N)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\chi(n)}{n^w}e^{-n/N}$ сходится всюду. С помощью трансформации Mellin'a:

$$e^{-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}x^{-w}\Gamma(w)\,dw,$$

где $\mathrm{Re}\, x>0$, $\alpha>0$, полагая $x=\frac{1}{N}+\frac{2\pi i m}{D}$ $(m=0,1,\ldots,D-1)$, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n n^{-s}e^{-n/N}e^{-\frac{2\pi i m n}{D}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K)}A(w+s)\Gamma(w)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi i m}{D}\right)^{-w}dw, \tag{4}$$

где число K выбрано так, чтобы ряд $A(w+s)$ абсолютно сходился.

Далее пользуемся известной формулой

$$\chi(n)=\frac{\varepsilon(\chi)}{\sqrt{D}}\sum_{m=0}^{D-1}\overline{\chi}(-m)\,e^{-\frac{2\pi imn}{D}}.$$

Выписывая равенства (4) для $m=0, 1, \ldots, D-1$, умножая на $\frac{\varepsilon(\chi)}{\sqrt{D}}\overline{\chi}(-m)$ и складывая, получим:

$$A(s,\chi,N)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}\chi(n)\,e^{-n/N}=$$

$$=\frac{\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}}\int_{(K)}A(w+s)\,\Gamma(w)\left(\sum_{m=0}^{D-1}\overline{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi im}{D}\right)^{-w}\right)dw\,; \qquad (5)$$

здесь интегрирование идет по вертикали $\operatorname{Re} w=K$; вместо указанной системы вычетов можно взять любую другую полную систему.

Поэтому при $\operatorname{Re}s>K$ получим

$$A(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}\chi(n)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}}\int_{(K)}A(w+s)\,\Gamma(w)\left(\sum_{m=0}^{D-1}\overline{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi im}{D}\right)^{-w}\right)dw. \qquad (6)$$

В частности, полагая $A(w)=\zeta(w)$, $A(s,\chi)=L(s,\chi)$, получим уже для любого s:

$$L(s,\chi)=\lim_{N\to\infty}\frac{\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}}\int_{(K)}\zeta(w+s)\,\Gamma(w)\left(\sum_{m=0}^{D-1}\overline{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi im}{D}\right)^{-w}\right)dw\,. \qquad (7)$$

Это и есть равенство, выражающее L-ряд через ζ-функцию. Оно же позволяет перенести понятие о приложении оператора L_χ на некоторый класс функций, регулярных в какой-либо вертикальной полуплоскости (например, для $A(w)=e^{w^2}$, $A(w)=\Gamma(w)$ и т. п.).

3. Можно указать некоторые применения (7). Заменяя в нем $\zeta(w+s)$ на $\zeta(1-w-s)$, помноженное на факторы, требуемые функциональным уравнением, получим, после несложных выкладок, функциональное уравнение для $L(s,\chi)$. Оно, таким образом, есть следствие уравнения для $\zeta(w)$, но до сих пор выводилось всегда отдельно от последнего. Если замену $A(w+s)\to\zeta(w+s)$ совершить в (5), то получим обобщенное уравнение Paley.

Интересные следствия дает (5) при замене $A(w)$ на $-\frac{\zeta'}{\zeta}(w)$. Мы напишем соответственную формулу для $s=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,\Lambda(n)\,e^{-n/N}=$$

$$=-\frac{\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\zeta'}{\zeta}(w)\,\Gamma(w)\left(\sum_{m=0}^{D-1}\overline{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi im}{D}\right)^{-w}\right)dw\,.$$

Считая модуль D фиксированным, N большим и перенося контур на $\operatorname{Re} w = -{}^3/_2$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\,\Lambda(n)\,e^{-n/N} =$$

$$= \frac{-\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}} \sum_{\rho_k \text{ нули } \zeta(w)} \Gamma(\rho_k) \sum_{m=0}^{D-1} \overline{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N} + \frac{2\pi i m}{D}\right)^{-\rho_k} + O(\ln^2 N). \tag{8}$$

Здесь сумма, стоящая слева, выражена через нули ζ-функции. До сих пор были известны лишь ее выражения через нули $L(w, \chi)$. Сумма справа абсолютно сходится, и в ней существенны лишь $\rho_k = \beta_k + it_k$ под условием $|t_k| < N \ln^2 N$. Вместо указанной в (8) системе вычетов можно взять любую другую полную систему.

4. В заключение укажем, что аналогичные соображения приводят к следующему критерию слабой гипотезы Riemann'a:

Существует C_0 под условием: для того, чтобы все нули $\zeta(s)$ лежали в полуплоскости $\sigma < 1 - \eta_0$ $(\eta_0 < {}^1/_4)$, необходимо и достаточно существование оценки:

$$\sum_{p=2}^{\infty} e^{2\pi i \sqrt[m]{p}}\, e^{-\sqrt[m]{p/N}} \ll N^{1 - \frac{1}{2m} - \frac{\eta_0}{m} - \varepsilon} \tag{9}$$

при каком-либо $m > C_0$. В настоящее время известна оценка $\ll N^{1 - \frac{1}{2m} + \varepsilon}$.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
27 II 1947