Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. А. ВАЙНШТЕЙН

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ П. С. АЛЕКСАНДРОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 V 1947)

Непрерывное отображение f пространства X на пространство Y называется замкнутым отображением, если образ $f(F)$ каждого замкнутого в X множества F есть множество, замкнутое в Y. f называется монотонным (нульмерным, конечнократным) отображением, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ есть связное (соответственно, нульмерное или конечное множество). f называется неприводимым отображением, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ из $f(F)=Y$ следует $F=X$. Мы будем называть f компактным отображением, если f замкнуто и если полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ есть компакт. Мы будем говорить, что отображение f разложено в суперпозицию отображений φ и ψ, если существует пространство Z и отображения: φ — пространства X на пространство Z и ψ — пространства Z на Y такие, что $f=\psi\varphi$. В дальнейшем под словом „отображение" подразумевается замкнутое отображение, а под словом „пространство" — метрическое пространство со счетным базисом.

Представляет интерес вопрос о возможности сведения исследования произвольного повышающего размерность отображения f пространства X на пространство Y к исследованию отображений более простого вида. Можно итти в двух направлениях:

1) Разыскивать замкнутое множество $F \subset X$, для которого $f(F)=Y$ и на котором отображение f имеет более простой вид.

2) Пытаться разложить отображение f в суперпозицию отображений более простого вида.

В первом направлении с помощью теоремы о том, что граница полного прообраза каждой точки есть компакт ([1]), получаем:

Теорема 1. *Всегда существует замкнутое множество $F \subset X$, неприводимо отображающееся на Y.*

Во втором направлении существенным результатом является теорема Eilenberg'a—Whyburn'a ([2,3]), показывающая, что отображение компакта можно разложить в суперпозицию монотонного и нульмерного отображений. На произвольные отображения некомпактных пространств эту теорему перенести нельзя. Однако справедлива

Теорема 2. *Компактное отображение можно разложить в суперпозицию двух компактных отображений: монотонного и нульмерного.*

Теорема 2, в частности, имеет место для неприводимого отображения, так как неприводимое отображение компактно. Действительно, если f — отображение пространства X на пространство Y, то существует ([1]) замкнутое множество $F \subset X$, компактно отображающееся на Y. Если f неприводимо, то $F=X$ и само X отображается на Y компактно.

Существуют примеры и нульмерных и монотонных (как приводимых, так и неприводимых) повышающих размерность отображений. Таким образом, теорема 2 выделяет два основных класса повышающих размерность отображений, изучение каждого из которых представляет существенный интерес.

Наиболее простой класс повышающих размерность отображений образуют конечнократные отображения. П. С. Александров поставил следующую проблему:

Проблема П. С. Александрова. Пусть f — повышающее размерность отображение пространства X на пространство Y. Можно ли при достаточно широких предположениях относительно f, X и Y разложить f в суперпозицию двух отображений: неповышающего размерность и конечнократного (повышающего размерность)?

Без дополнительных предположений проблема решается отрицательно, даже если предполагать, что отображение f неприводимо (в силу теоремы 1 такое предположение закономерно). Действительно, как мы упоминали, существуют монотонные неприводимые отображения, повышающие размерность. Но монотонное отображение вообще нельзя разложить в суперпозицию отображений φ и ψ так, чтобы ψ было конечнократно.

Вообще говоря, проблема решается отрицательно и для нульмерных отображений. Действительно, в известном примере А. Н. Колмогорова ([4]) повышающего размерность открытого отображения отображение, как нетрудно видеть, нульмерно. Но его нельзя разложить в суперпозицию неповышающего размерность и конечнократного отображений. В самом деле, если f — открытое отображение и $f=\psi\varphi$, то ψ — также открытое отображение. Поэтому, если ψ сверх того и конечнократно, то оно не повышает размерности ([5]).

Из этих соображений следует также, что из положительного решения проблемы П. С. Александрова для произвольных отображений куба J_p на куб J_q при $p<q$ немедленно вытекало бы положительное решение известной проблемы о невозможности открытых отображений куба J_p на куб J_q.

Ниже будет дано положительное решение проблемы П. С. Александрова, правда, для весьма узкого класса отображений. Оно получится как следствие следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть f — неприводимое отображение нульмерного пространства X на полное n-мерное пространство Y, удовлетворяющее следующему условию:*

α) *Всякое замкнутое нигде не плотное в Y множество имеет размерность меньшую, чем Y.*

Тогда существуют пространство Z и (очевидно, неприводимые) отображения: φ — пространства X на пространство Z и ψ — пространства Z на пространство Y, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $f=\psi\varphi$, 2) ψ *конечнократно и* 3) $\dim Z \leqslant n-1$.

Наметим доказательство теоремы. Рассмотрим непрерывное разбиение

$$X=\bigcup A \tag{1}$$

пространства X на полные прообразы $f^{-1}(y)=A$ точек $y\in Y$. Все элементы разбиения (1) — компакты.

Для всякого $\varepsilon>0$ множество M_ε точек $y\in Y$, для которых диаметр $d(f^{-1}(y))\geqslant\varepsilon$, является замкнутым нигде не плотным в Y множеством. Положим $N^k=f^{-1}(M_{1/k})$. Так как $M_{1/k}$ замкнуто в Y, то N^k замкнуто в X при любом k.

Положим $T_0 = X$, $P_0 = N^1$ и $T_0 \setminus P_0 = H_0$. Для каждой точки $x \in H_0$ возьмем сферическую окрестность $U(x, \varepsilon)$, где $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon < \frac{1}{4} \rho(x, P_0)$. Так как X нульмерно, то найдется замкнутая окрестность $V(x) \subset U(x, \varepsilon)$ точки x. Множества $V(x)$ покрывают H_0 и, так как H_0 обладает счетным базисом, из этого покрытия можно выделить счетное подпокрытие $V_1, V_2, \ldots, V_{n_1}, \ldots$

Положим $T_1 = V_1$, $T_2 = V_2 \setminus V_1, \ldots, T_{n_1} = V_{n_1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n_1-1} V_k, \ldots$ Тогда все множества T_{n_1} открыты и замкнуты в X, попарно не пересекаются, образуют покрытие множества H_0 и, наконец, удовлетворяют условию: $d(T_{n_1}) < \rho(P_0, T_{n_1})$.

Каждый элемент A разбиения (1), имеющий диаметр < 1, т. е. содержащийся в H_0, покрыт лишь конечным числом множеств T_{n_1}, ибо множества T_{n_1} попарно не пересекаются, а так как A — компакт, из всякого его покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

По индукции, повторяя указанный процесс, построим множества $T_{n_1 \ldots n_k}$ и $P_{n_1 \ldots n_k}$ (с любым конечным числом индексов, принимающих целочисленные значения), обладающие следующими свойствами:

1°. Все множества $T_{n_1 \ldots n_k}$ открыты и замкнуты в X.

2°. Все множества $T_{n_1 \ldots n_k}$ (с равным числом k индексов) попарно не пересекаются.

3°. $T_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k} \subset T_{n_1 \ldots n_{k-1}}$.

4°. $P_{n_1 \ldots n_k} = T_{n_1 \ldots n_k} \cap N^{k+1}$.

5°. $d(T_{n_1 \ldots n_k}) < 1/k$.

6°. $d(T_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k}) < \rho(T_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k}, P_{n_1 \ldots n_{k-1}})$.

7°. $T_{n_1 \ldots n_{k-1}} \setminus P_{n_1 \ldots n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} T_{n_1 \ldots n_{k-1} n_k}$.

8°. Каждый элемент A разбиения (1) с $d(A) \geqslant 1/k$ не пересекается ни с одним из множеств $T_{n_1 \ldots n_k}$; каждый элемент A разбиения (1) с $d(A) < 1/k$ покрыт множествами $T_{n_1 \ldots n_k}$, и притом только конечным числом этих множеств.

Построим теперь разбиение пространства X на замкнутые (очевидно, компактные) попарно не пересекающиеся множества:

$$X = \bigcup B. \tag{2}$$

Рассмотрим произвольный элемент A разбиения (1). Если $d(A) = 0$, т. е. A состоит из одной точки, и если $d(A) \geqslant 1$, то в качестве элемента B разбиения (2) берем само множество A. Если $0 < d(A) < 1$, то пусть k — такое целое число, что $\frac{1}{k+1} \leqslant d(A) < \frac{1}{k}$.

В качестве элементов B разбиения (2) берем тогда все непустые пересечения $A \cap T_{n_1 \ldots n_k}$ множества A с всевозможными множествами $T_{n_1 \ldots n_k}$, имеющими точно k индексов. Все такие пересечения, согласно 8°, покрывают A. Таким образом, множества B покрывают пространство X.

В силу 2° элементы разбиения (2) попарно не пересекаются, а в силу 1° все они замкнуты. Следовательно, (2), действительно, является разбиением пространства X. Это разбиение непрерывно.

Обозначим пространство разбиения (2) через Z, а естественное отображение X на Z через φ. Тогда φ — замкнутое и, следовательно, компактное отображение. Можно показать, что Z как образ метрического пространства со счетным базисом X при компактном отображении также есть метрическое пространство со счетным базисом.

Для каждой точки $z \in Z$ полагаем: $\psi(z) = f(\varphi^{-1}(z))$. Тогда ψ — замкнутое отображение. Из условия 8° следует, что ψ конечнократно. Очевидно, $f = \psi\varphi$.

Наконец, используя свойства нашей конструкции и то обстоятельство, что Y удовлетворяет условию α), показываем, что $\dim Z \leqslant n - 1$, чем завершается доказательство теоремы.

Следствие. *Неприводимое отображение нульмерного пространства на полное одномерное пространство, удовлетворяющее условию α), можно разложить в суперпозицию двух отображений: не повышающего размерность и конечнократного.*

В частности, это верно для неприводимых отображений канторова совершенного множества на отрезок.

Научно-исследовательский
институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Вайнштейн, ДАН, **57**, № 4 (1947). [2] S. Eilenberg, Fund. Math., **22**, 292 (1934). [3] G. T. Whyburn, Am. J. Math., **56**, 294 (1934). [4] А. Н. Колмогоров, Ann. Math., **38**, 36 (1937). [5] П. С. Александров, ДАН, **4**, 283 (1936).