Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 5

МАТЕМАТИКА

К. И. БАБЕНКО

О БАЗИСАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 30 I 1947)

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H. Последовательность $\{x_k\} \subset H$ называется базисом, если любой элемент $y \in H$ может быть единственным образом представлен в виде:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

где $a_1, a_2, \ldots$ — числа (комплексные).

Последовательность $\{z_k\}$ называется сопряженной с $\{x_k\}$, если

$$(x_n, z_m) = \delta_{nm}.$$

Винер и Палей доказали для пространства L^2 предложение ([1]), обобщением которого является следующая

Теорема 1. *Пусть $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — последовательности элементов из H. Если последовательность $\{x_k\}$ образует базис или линейная оболочка над $\{x_k\}$ совпадает с H, то тем же свойством обладает и $\{y_k\}$, если*

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k (x_k - y_k) \right\| \leqslant \theta \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right\| \tag{1}$$

при произвольных a_k и N, где $\theta < 1$ не зависит ни от a_k, ни от N.

Доказательство. Пусть линейная оболочка над $\{x_k\}$ совпадает с H. Определим в H линейный оператор так:

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k.$$

Если x — произвольный элемент из H, то существует последовательность агрегатов $\left\{\sum a_k x_k\right\}$, сходящаяся к x. Но тогда, в силу (1), последовательность $\left\{\sum a_k y_k\right\}$ сходится к некоторому элементу y. Положим

$$Tx = y.$$

В силу (1) имеем

$$\| E - T \| \leqslant \theta, \quad \| T \| \leqslant 1 + \theta, \tag{2}$$

где E — тождественный оператор. В силу первого неравенства (2) существует обратный оператор

$$T^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(E-T)^k, \quad \|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\theta}.$$

Следовательно, уравнение $Tx=y$ имеет решение при любом $y \in H$, а это означает, что y есть предел агрегатов вида $\sum c_k y_k$.

Таким образом, линейная оболочка над $\{y_k\}$ совпадает с H. Если $\{x_k\}$ — базис, то

$$Tx=T\left(\sum_{1}^{\infty} a_k x_k\right)=\sum_{1}^{\infty} a_k y_k=y.$$

В силу (1) ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k y_k$ сходится. Так как существует T^{-1}, то $\{y_k\}$ — базис.

При доказательстве мы нигде не пользовались тем фактом, что H — гильбертово пространство. Достаточно было предположить, что H — линейное векторное пространство.

Если дана полная ортонормированная система $\{x_k\}$ и последовательность $\{y_k\}$ выполняет условие (1), то $\{y_k\}$ — базис такой, что

$$(1-\theta)\left\{\sum_{1}^{\infty}|a_k|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{1}^{\infty} a_k y_k\right\| \leqslant (1+\theta)\left\{\sum_{1}^{\infty}|a_k|^2\right\}^{1/2}.$$

Следуя Н. К. Бари, базисы, которые обладают свойством:

$$m\left\{\sum_{1}^{\infty}|a_k|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{1}^{\infty} a_k f_k\right\| \leqslant M\left\{\sum_{1}^{\infty}|a_k|^2\right\}^{1/2},$$

будем называть базисами Рисса.

Таким образом, исходя из какой-то полной ортонормированной системы $\{e_k\}$, переходя к базисам $\{f_k^{(1)}\}, \{f_k^{(2)}\}, \ldots, \{f_k^{(n)}\}$ так, чтобы $\{e_k\}$ и $\{f_k^{(1)}\}$, $\{f_k^{(i)}\}$ и $\{f_k^{(i+1)}\}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ выполняли соотношение (1), мы получим какой-то базис Рисса.

Интересно, что последний факт допускает обращение. А именно, имеет место следующая

Теорема 2. *Если* $\{f_k\}$ — *базис Рисса, т. е.*

$$m\left\{\sum_{1}^{\infty}|a_k|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{1}^{\infty} a_k f_k\right\| \leqslant M\left\{\sum_{1}^{\infty}|a_k|^2\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

то можно найти такие базисы $\{f_k^{(i)}\}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, *что будут иметь место соотношения*

$$m_i\left\{\sum_{1}^{\infty}|a_k|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{1}^{\infty} a_k f_k^{(i)}\right\| \leqslant M_i\left\{\sum_{1}^{\infty}|a_k|^2\right\}^{1/2},$$

$$M_{n-1} < M_{n-2} < \ldots < M_1 < M_0 = M,$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k\left(f_k^{(i)}-f_k^{(i+1)}\right)\right\| \leqslant \theta_i \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k f_k^{(i)}\right\|,$$

$i=0, 1, \ldots, n$; $\theta_i < 1$, *причем* $f_k^{(0)}=f_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, $\{f_k^{(n)}\}$ — *полная ортонормированная система.*

Доказательство. Если $\{f_k\}$ — базис, то, как известно, существует сопряженная система $\{g_k\}$.

Определим в H линейный оператор так:

$$Af_k = g_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$Ax = \sum_1^\infty a_k g_k, \text{ если } x = \sum_1^\infty a_k f_k.$$

Оператор A определен на тех элементах $x \in H$, для которых ряд $\sum\limits_1^\infty a_k g_k$ сходится. Ясно, что область определения оператора A всюду плотна в H. Далее,

$$(Ax, x) = \sum_1^\infty |a_k|^2 > 0.$$

В силу (3)

$$\frac{1}{M^2} \|x\|^2 \leqslant (Ax, x) \leqslant \frac{1}{m^2} \|x\|^2.$$

Следовательно, оператор A ограничен, определен во всем пространстве и

$$(Ax, x) > 0,$$

т. е. A — положительный эрмитов оператор. Ясно, что обратный оператор A^{-1} существует и есть ограниченный положительный эрмитов оператор.

Пусть

$$0 < \alpha = \inf_{\|x\|=1} (A^{-1} x, x) < \sup_{\|x\|=1} (A^{-1} x, x) = \beta.$$

Тогда

$$A^{-1} = \int_\alpha^\beta \lambda \, dE_\lambda, \quad \beta \leqslant M^2.$$

Рассмотрим оператор

$$C^{-1} = \int_\alpha^\beta \lambda^{1/2n} \, dE_\lambda,$$

где n определяется следующим неравенством:

$$2^{n-1} \leqslant M < 2^n.$$

C^{-1} — положительный эрмитов оператор,

$$\|C^{-1}\| = \beta^{1/2n} < 2, \qquad C^{-2n} = A^{-1}, \qquad \|E - C^{-1}\| = \theta < 1.$$

Далее, $C^{2n} = A$. Оператор C переводит элементы f_k в φ_k. $\{\varphi_k\}$ — базис, так как, если $x = \sum\limits_1^\infty a_k f_k$, то $\sum\limits_1^\infty a_k \varphi_k$ сходится; поскольку C^{-1} существует, любой элемент можно представить единственным образом в виде $x = \sum\limits_1^\infty b_k \varphi_k$.

Оператор C^n переводит f_k в e_k, поэтому

$$(e_k, e_m) = (C^n f_k, C^n f_m) = (C^{2n} f_k, f_m) = (g_k, f_m) = \delta_{km},$$

т. е. $\{e_k\}$ — ортонормированная система. Ясно, что $\{e_k\}$ — полная система. Пусть

$$x = \sum_1^\infty a_k f_k,$$

тогда

$$Cx = \sum_1^\infty a_k \varphi_k, \quad C^n x = \sum_1^\infty a_k e_k,$$

$$\| C^{n-1} C x \| = \left\{ \sum_1^\infty |a_k|^2 \right\}^{1/2} \geqslant \frac{1}{M^{\frac{n-1}{n}}} \left\| \sum_1^\infty a_k \varphi_k \right\|,$$

т. е.

$$\left\| \sum_1^\infty a_k \varphi_k \right\| \leqslant M^{\frac{n-1}{n}} \left\{ \sum_1^\infty |a_k|^2 \right\}^{1/2}.$$

Далее,

$$\left\| \sum_1^N a_k (\varphi_k - f_k) \right\| = \left\| (E - C^{-1}) \sum_1^N a_k \varphi_k \right\| \leqslant \theta \left\| \sum_1^N a_k \varphi_k \right\|.$$

Таким образом, базис $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условиям теоремы. Положив $\varphi_k = f_k^{(1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $M^{\frac{n-1}{n}} = M_1 < M$ и применив приведенное рассуждение, мы получим базис $\{f_k^{(2)}\}$ и константу $M_2 < M_1$. Повторив подобную конструкцию $n-1$ раз, придем к последовательности $\{f_k^{(n-1)}\}$, для которой

$$m_{n-1} \left\{ \sum_1^\infty |a_k|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \left\| \sum_1^\infty a_k f_k^{(n-1)} \right\| \leqslant M_{n-1} \left\{ \sum_1^\infty |a_k|^2 \right\}^{1/2}, \quad M_{n-1} < 2.$$

Тогда, построив, как и выше, оператор A, найдем, что

$$\| A^{-1} \| < 2.$$

Положительный эрмитов оператор B такой, что $B^2 = A$, переводит элементы $f_k^{(n-1)}$ в e_k. $\{e_k\}$ — полная ортонормированная система. Далее,

$$\| E - B^{-1} \| = \theta < 1,$$

т. е.

$$\left\| \sum_1^N a_k (f_k^{(n-1)} - e_k) \right\| \leqslant \theta \left\{ \sum_1^N |a_k|^2 \right\}^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Примечание. Из теоремы 1 просто следуют теоремы 4, 5, 6 работы Н. К. Бари (²) с помощью следующего очевидного факта: если последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots$ — базис и $g_1, g_2, \ldots, g_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$ — линейно независимая последовательность в пространстве Гильберта, то $g_1, g_2, \ldots, g_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$ — базис.

Поступило
30 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, N.-Y., 1934. [2] N. Bary, Мат. сб., 14, 1—2 (1944).