Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 7

АЭРОДИНАМИКА

Ф. ФРАНКЛЬ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ КРЫЛА БЕСКОНЕЧНОГО РАЗМАХА, ДВИЖУЩЕГОСЯ СО СКОРОСТЬЮ ЗВУКА

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 19 III 1947)

В работе строится семейство решений уравнений Чаплыгина, представляющих собой обтекание крыльев бесконечного размаха со скоростью звука в бесконечности.

Уравнения Чаплыгина ([1]) пишутся в форме С. В. Фальковича ([2]):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-B\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=B\eta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad (1)$$

где η—убывающая функция скорости, равная нулю при критической скорости; B — возрастающая функция скорости, равная нулю при нулевой скорости.

Исключение φ или, соответственно, ψ дает:

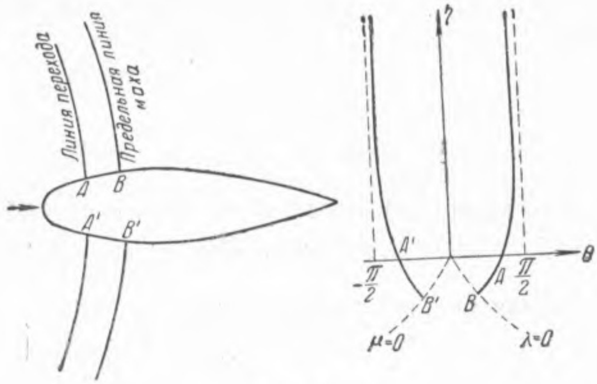

Рис. 1

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+b\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{b}{\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0, \qquad (2)$$

где $b(\eta)=\dfrac{d}{d\eta}\ln B$.

Рассматриваем сначала случай обтекания симметричного профиля при нулевом угле атаки. Тогда φ будет четная, а ψ — нечетная функция θ. Точка $\theta=\eta=0$ соответствует бесконечно отдаленным точкам течения и поэтому должна быть особой точкой искомого решения.

Характеристики

$$\lambda=\theta-\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}=0,\qquad \mu=\theta+\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}=0 \qquad (3)$$

соответствуют „предельным линиям Маха“, идущим вниз по течению и сливающимся в бесконечности с „линиями перехода“ от до- к сверхзвуковым скоростям (см. рис. 1). Поток ниже (по течению) предельных линий Маха нас не интересует, так как он не влияет на поток вверх по течению от этих линий и полностью определяется последним.

Следовательно, на линиях (3) функции φ и ψ должны быть конечными; естественно также требовать конечность производных по λ и μ (что соответствует регулярному профилю).

Ищем тогда „главный член“ функции ψ, определяющий характер особенности, в виде

$$\hat{\psi}=\rho^{k} f(\theta/\rho), \tag{4}$$

где $\rho=\sqrt{\theta^2+{}^4/_9\eta^3}$, а $\hat{\psi}$ удовлетворяет уравнению Трикоми [3]

$$\eta\,\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\eta^2}=0. \tag{5}$$

Требование регулярности функции $\hat{\psi}$ на характеристиках (3) приводит к уравнению

$$k={}^1/_3+2m \quad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots), \tag{6}$$

причем нас интересуют только отрицательные значения k. Любое из этих значений (—5/3, —11/3, . . .) может быть использовано для построения решения уравнений (1), представляющего обтекание профиля со скоростью звука в бесконечности. Исходя, однако, из предположения, что в действительности могут осуществляться только такие решения, которые соответствуют наибыстрейшему убыванию скоростей возмущения в бесконечности, мы ограничиваемся в дальнейшем случаем

$$k=-5/3, \tag{7}$$

так что

$$\hat{\psi}=\rho^{-5/3} f(\theta/\rho). \tag{8}$$

Функция $f(s)$ оказывается алгебраической, а именно:

$$f(s)=(1-s)^{1/3}({}^1/_3+s)-(1+s)^{1/3}({}^1/_3-s). \tag{8a}$$

Главный член потенциала имеет вид:

$$\hat{\varphi}=\rho^{-4/3} g(\theta/\rho). \tag{9}$$

Отсюда вытекает, что поперечные скорости возмущения вдоль линии перехода и вдоль предельной линии Маха убывают как $|y|^{-3/5}$, в то время как продольные скорости возмущения перед крылом убывают как $|x|^{-3/4}$. Отсюда же следует, что линия перехода и предельная линия Маха на большом расстоянии от крыла приближаются к параболам степени 5/4:

$$y=\pm Cx^{5/4}. \tag{10}$$

Для получения строгого решения находят, прежде всего, три поправки:

$$\hat{\psi}_1=\rho^{-1} f_1(\theta/\rho),\quad \hat{\psi}_2=\rho^{-1/3} f_2(\theta/\rho),\quad \hat{\psi}_3=\rho^{1/3} f_3(\theta/\rho), \tag{11}$$

удовлетворяющие неоднородным уравнениям Трикоми, а именно:

$$\eta\,\frac{\partial^2\hat{\psi}_1}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\hat{\psi}_1}{\partial\eta^2}=-b_0\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\eta},\quad \eta\,\frac{\partial^2\hat{\psi}_2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\hat{\psi}_2}{\partial\eta^2}=-b_0\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial\eta}-b_1\eta\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\eta},$$

$$\eta\,\frac{\partial^2\hat{\psi}_3}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\hat{\psi}_3}{\partial\eta^2}=-b_0\frac{\partial\hat{\psi}_2}{\partial\eta}-b_1\eta\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial\eta}-b_2\eta^2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\eta} \tag{12}$$

$$(b(\eta)=b_0+b_1\eta+b_2\eta^2+\dots).$$

Функции f_1, f_2, f_3 удовлетворяют некоторым неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые сводятся к гипергеометрическим; f_1 и f_2 определяются однозначно требованием, чтобы поправки $\hat{\psi}_1$ и $\hat{\psi}_2$ были регулярны на характеристиках (3). Функция f_3 содержит один произвольный параметр, которым воспользуемся для того, чтобы было $f_3(1)=0$ (что, впрочем, несущественно).

По существу поставленной задачи полученное решение должно быть периодической функцией θ с периодом 2π. Поэтому мы строим на основании главного члена и первых трех поправок следующие периодические функции:

$$\psi_0=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}(\theta+2\pi m,\eta),\quad \psi_1=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_1(\theta+2\pi m,\eta),$$

$$\psi_2=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_2(\theta+2\pi m,\eta). \tag{13}$$

Эти суммы сходятся абсолютно и равномерно в любой области, лежащей вместе с границей в области, состоящей из верхней полуплоскости и характеристических треугольников, $\lambda>2\pi n$, $\mu<2\pi(n+1)$, $\eta\leqslant 0$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$, причем перед суммированием нужно соединять члены с номерами $\pm m$ в один член.

Для получения периодизованной третьей поправки приходится воспользоваться обобщенной формулой суммирования

$$\psi_3=\iint\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\hat{\psi}_3(\theta+2\pi m,\eta)\right]d\theta^2. \tag{14}$$

В двойном интеграле постоянные интегрирования должны быть определены так, чтобы получилась функция θ, нечетная и периодическая с периодом 2π.

Далее доказывается следующая асимптотическая формула для функций Чаплыгина ([1])

$$\frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau^*)}=\lambda\left(n^{\frac{2}{3}}\eta\right)+n^{-\frac{2}{3}}\lambda^{(1)}\left(n^{\frac{2}{3}}\eta\right)+\dots$$

$$\dots+n^{-\frac{2}{3}k}\lambda^{(k)}\left(n^{\frac{2}{3}}\eta\right)+n^{-\frac{2}{3}(k+1)}\Lambda_n^{(k+1)}\left(n^{\frac{2}{3}}\eta\right) \tag{15}$$

$\left(\tau\right.$ — квадрат отношения модуля скорости к скорости истечения в вакуум, $\left.\tau^*=\frac{c_p-c_v}{c_p+c_v}\right)$, где $|\Lambda_n^{(k+1)}(\xi)|<A^{(k+1)}$, $|\Lambda_n^{(k+1)'}(\xi)|<A^{(k+1)}$

$\lambda(\xi)$ — функция Эйри ([4]), которая определяется условиями

$$\lambda''(\xi)-\xi\lambda(\xi)=0,\quad \lambda(0)=1,\quad \lambda(+\infty)=0, \tag{16}$$

а функции $\lambda^{(i)}(\xi)$ определяются некоторыми неоднородными уравнениями Эйри и краевыми условиями

$$\lambda^{(i)}(0)=\lambda^{(i)}(+\infty)=0. \tag{16a}$$

Воспользовавшись еще уравнением Ф. Трикоми ([3])

$$\operatorname{sign}\theta\cdot|\theta|^k+\sum_{m=1}^{\infty}\left[(\theta+2\pi m)^k-(-\theta+2\pi m)^k\right]=$$

$$=\frac{2\Gamma(k+1)\sin\frac{\pi}{2}(k+1)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^{k+1}}\quad(-2\pi<\theta<2\pi) \tag{17}$$

и несколько обобщив его, выводим теперь разложение функций ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 в тригонометрические ряды относительно θ. Получаем:

$$\psi_0 = \beta_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2/3} \lambda(n^{2/3}\eta) \sin n\theta, \qquad \psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [\beta_0 \lambda^{(1)}(n^{2/3}\eta) + \beta_1 \lambda(n^{2/3}\eta)] \sin n\theta,$$

$$\psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} [\beta_0 \lambda^{(2)}(n^{2/3}\eta) + \beta_1 \lambda^{(1)}(n^{2/3}\eta) + \beta_2 \lambda(n^{2/3}\eta)] \sin n\theta, \tag{18}$$

$$\psi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3} [\beta_0 \lambda^{(3)}(n^{2/3}\eta) + \beta_1 \lambda^{(2)}(n^{2/3}\eta) + \beta_2 \lambda^{(1)}(n^{2/3}\eta)] \sin n\theta,$$

где $\beta_0 = \dfrac{2f(1)}{\Gamma(5/3)}$, $\quad \beta_1 = f_1(1)$, $\quad \beta_2 = \dfrac{2f_2(1)}{\Gamma(1/3)}$.

Сравнение формул (15) и (18) наводит на мысль о существовании строгого решения задачи, разлагающегося в области дозвуковых скоростей в ряд

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_0 n^{2/3} + \beta_1 + \beta_2 n^{-2/3}) \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau^*)} \sin n\theta. \tag{19}$$

В самом деле, если ψ написать в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \delta\psi, \tag{20}$$

то остаточный член $\delta\psi$ в гиперболической полуплоскости находится путем решения некоторой задачи Коши с начальными данными на переходной линии, а пользуясь более ранними результатами автора ([5]), легко доказать, что функция $\delta\psi$ и ее производные $\partial\delta\psi/\partial\lambda$, $\partial\delta\psi/\partial\mu$ остаются конечными на характеристиках (3). Чтобы получить обтекание тупоносого профиля, нужно, чтобы при очень малых τ было $\psi = 0$ при $\theta = \pi/2$, $\psi \neq 0$ при $0 < \theta < \pi/2$. Функция (19) не удовлетворяет этому условию, но если в ряде (19) опустить первый член, то условие будет выполнено.

Итак, окончательное решение задачи представляется в виде:

$$\Psi = \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_0 n^{2/3} + \beta_1 + \beta_2 n^{-2/3}) \frac{z_{n/2}(\tau)}{z_{n/2}(\tau^*)} \sin n\theta. \tag{21}$$

В этом решении можно произвольно менять любое конечное число коэффициентов: все равно получается симметричное обтекание тупоносого профиля со скоростью звука в бесконечности (лишь бы коэффициент при члене $n=2$ был отличным от нуля).

Нетрудно доказать, что в полученных решениях в точках, достаточно отдаленных от крыла, не могут образоваться огибающие линий Маха; может ли это случиться вблизи крыла, нужно в каждом случае проверять непосредственным вычислением.

Чтобы получить пример несимметричного обтекания, достаточно заменить член с номером $n=2$ членом вида $Az_1(\tau) \sin 2(\theta - \theta_0)$. Тогда разветвляющаяся линия тока подходит к обтекаемому контуру под углом наклона $\theta = \theta_0$.

Институт механики Московского
государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, О газовых струях, Собр. соч., II, 1933. [2] С. В. Фалькович, Прикл. мат. и мех., 10, 4 (1946). [3] Ф. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка гиперболического типа, 1947. [4] Ф. И. Франкль, Изв. АН СССР, сер. мат., 9, №№ 2 и 5 (1945). [5] Ф. И. Франкль, ДАН, 56, № 7 (1947).