Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 7

МАТЕМАТИКА

П. П. КУФАРЕВ

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЯ ЛОВНЕРА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 III 1947)

Пусть $\{\alpha(t)\}$—класс функций, непрерывных на сегменте $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Обозначим через $w(w_0, t)$ интеграл дифференциального уравнения Ловнера:

$$\frac{d \log w}{dt} = -\frac{e^{i\alpha(t)} + w}{e^{i\alpha(t)} - w}, \tag{1}$$

принимающий значение w_0, $|w_0| < 1$, при $t \to t_0 + 0$.

Здесь приводится пример, показывающий, что функция

$$w = w(w_0, t), \quad t_0 < t < T, \tag{2}$$

не обязательно отображает круг $|w_0| < 1$ на область, получающуюся из круга $|w| < 1$ проведением разреза по дуге Жордана ([1]).

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d \log w}{dt} = -\frac{\varkappa^3 + w}{\varkappa^3 - w}, \tag{3}$$

где

$$\varkappa = e^{-(t-t_0)} + i\sqrt{1 - e^{-2(t-t_0)}}. \tag{4}$$

Принимая за аргумент $\varkappa$, приведем уравнение (3) к виду:

$$\varkappa(\varkappa^2 + 1)(\varkappa^3 - w)\, dw - w(\varkappa^2 - 1)(\varkappa^3 + w)\, d\varkappa = 0. \tag{5}$$

Интегрирующим множителем этого уравнения является функция:

$$f = \frac{2(\varkappa - w)}{[\varkappa^2(\varkappa^2 + 1) - 2\varkappa w]^2}. \tag{6}$$

После умножения на f уравнение (5) принимает вид:

$$dw_0 = 0, \tag{7}$$

где

$$w_0 = \frac{2\varkappa^3 w - (\varkappa^2 + 1) w^2}{\varkappa^2(\varkappa^2 + 1) - 2\varkappa w}. \tag{8}$$

Таким образом, ветвь

$$w = w(w_0, t) = \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + 1}\left[w_0 + \varkappa^2 - \sqrt{(1 - w_0)(\varkappa^4 - w)} \right], \quad w(0, t) = 0, \tag{9}$$

функции, определяемой соотношением (8), есть интеграл уравнения (3), стремящийся к w_0 при $t \to t_0 + 0$.

Но функция (9) при $t > t_0$ отображает круг $|w_0| < 1$ на круговой двуугольник, получающийся из круга $|w| < 1$ выбрасыванием кругового двуугольника $B_w(t)$, ограниченного дугой

$$\arg \varkappa \leqslant \arg w \leqslant \arg \varkappa^3$$

окружности $|w| = 1$ и дугой ортогональной к $|w| = 1$ окружности, проходящей через точки $w = \varkappa$ и $w = \varkappa^3$.

Существенен следующий факт: функция

$$w^* = w^*(p, t) = \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + 1} \left[p + \varkappa^2 + \sqrt{(1-p)(\varkappa^4 - p)}\right] = \frac{\varkappa^2 p}{w(p, t)} \tag{10}$$

при $t < t_0$ отображает внешность круга $|p| > 1$ плоскости комплексного переменного p на $B_w(t)$. Так как функция $w^*(p, t)$ является интегралом уравнения (3), стремящимся к $\varkappa(t_0) = 1$ при $t \to t_0 + 0$, то таким образом выбрасываемая область $B_w(t)$ есть пересечение круга $|w| < 1$ и множества значений, принимаемых (при фиксированном t) интегралами уравнения (3), стремящимися к $\varkappa(t_0)$ при $t \to t_0 + 0$.

Возникает вопрос: каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы интеграл (2) уравнения (1) при всяком t, $t_0 < t \leqslant T$, осуществлял конформное отображение круга $|w_0| < 1$ на однолистную область, получающуюся из $|w| < 1$ проведением разреза по дуге Жордана.

Я думаю, что такое необходимое и достаточное условие состоит в существовании для любого τ, $t_0 \leqslant \tau < T$, лишь двух интегралов уравнения (1), стремящихся к $e^{i\alpha(\tau)}$ при $t \to \tau + 0$, и для любого τ, $t_0 < \tau \leqslant T$, лишь двух интегралов, стремящихся к $e^{i\alpha(\tau)}$ при $t \to T - 0$.

Достаточным условием является существование и непрерывность на $[t_0, T]$ производной $\alpha'(t)$.

Физико-технический институт
при Томском государственном
университете им. В. В. Куйбышева

Поступило
3 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Усп. математ. наук, 6, 42 (1939).