Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 7

МАТЕМАТИКА

ДЖ. Х. КАРИМОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 1 III 1947)

Настоящая работа является дополнением и развитием работы [1], в которой было рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}+\frac{(2k+1)^2}{\pi^2}\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4}=\Phi(x,\ t)+\mu f(Z) \tag{1}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} Z(0,\ t)=\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right|_{x=0}&=0, & Z(x,\ 0)&=Z(x,\ 1),\\ Z(1,\ t)=\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right|_{x=1}&=0, & \left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{t=0}&=\left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{t=1} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и доказана при некоторых ограничениях, накладываемых на μ, $\Phi(x, t)$ и $f(Z)$, теорема существования и единственности решения. При доказательстве этой теоремы существенно было требование, что параметр

$\mu<\frac{|a|\pi^2}{AN}$, где $a=\frac{2k+1}{\pi}$, $N=\sup|f'|$,

$$A=\sup\left[2\int_0^t d\sigma\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x\sin(2n+1)\pi\xi\cos(2n+1)^2\pi^2 a(t-\sigma)}{(2n+1)^2}\,d\xi\right|+\right.$$

$$\left.+2\int_0^1 d\sigma\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x\sin(2n+1)\pi\xi\cos(2n+1)^2\pi^2 a(t-\sigma+1/2)}{(2n+1)^2\sin\frac{(2n+1)^2\pi^2 a}{2}}\,d\xi\right|\right]=$$

$$=\sup\left[2\int_0^t d\sigma\int_0^1|K_1(x,t;\xi,\sigma)|\,d\xi+2\int_0^1 d\sigma\int_0^1|K_1(x,t;\xi,\sigma)|\,d\xi\right].$$

В настоящей работе рассмотрено уравнение (1) при условиях (2) и доказана теорема существования для любых значений параметра μ, при этом используется теорема Арцела.

Предположим:

1. Функция $\Phi(x,\ t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица

$$|\Phi(x_1,\ t_1)-\Phi(x_2,\ t_2)|<A(x_1-x_2)+B(t_1-t_2);$$

функции $\Phi_1(x,\ t)=\partial\Phi/\partial x$, $\Phi_2(x,\ t)=\partial\Phi/\partial t$ непрерывны в области D

и с ограниченными вариациями по x и по t, когда $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$; $\Phi(x, t)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\Phi(x, t) = \Phi(x, t+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2n+1}(t) \sin(2n+1)\pi x,$$

где

$$\Phi_{2n+1}(t) = \Phi_{2n+1}(t+1) = 2\int_0^1 \Phi(\sigma, t) \sin(2n+1)\pi\sigma d\sigma.$$

2. $|f'(Z_1) - f'(Z_2)| \leqslant M |Z_1 - Z_2|$.

3. $f(0) = 0, \quad f(-Z) = -f(Z)$.

4. $f(Z)$ ограничена при конечном изменении Z.

В этих предположениях докажем:

Теорема. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает непрерывное решение вместе с частными производными до четвертого порядка в области* $\overline{D}$, *удовлетворяющее условиям* (2), *если выполнены вышеуказанные условия.*

Докажем эту теорему методом последовательных приближений. За начальное приближение $Z_0(x, t)$ возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 Z_0}{\partial x^4} = \Phi(x, t), \tag{3}$$

удовлетворяющее условиям (2). Решение этого уравнения имеет вид

$$Z_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}^{(0)}(t) \sin(2n+1)\pi x, \tag{4}$$

где

$$S_{2n+1}^{(0)}(t) = 2\int_0^t d\sigma \int_0^1 \frac{\Phi(\xi, \sigma) \sin(2n+1)\pi\xi \sin(2n+1)^2 \pi^2 a (t-\sigma)}{a\pi^2 (2n+1)^2} d\xi +$$

$$+ 2\int_0^1 d\sigma \int_0^1 \frac{\Phi(\xi, \sigma) \sin(2n+1)\pi\xi \cos(2n+1)^2 \pi^2 a (t - \sigma + {}^1/_2)}{a\pi^2 (2n+1)^2 \sin\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a}{2}} d\xi.$$

Легко видеть, что $Z_0(x, t)$ удовлетворяет условиям (2) и является функцией, непрерывной вместе с частными производными до четвертого порядка в области $\overline{D}$.

Зная $(k-1)$-е приближение $Z_{k-1}(x, t)$, ищем k-е приближение $Z_k(x, t)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 Z_k}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 Z_k}{\partial x^4} = \Phi(x, t) + \mu f(Z_{k-1}) \tag{5}$$

при условиях (2). Это приближение имеет вид

$$Z_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}^{(k)}(t) \sin(2n+1)\pi x,$$

где

$$S_{2n+1}^{(k)}(t)=2\int_0^t d\sigma\int_0^1 \frac{[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z_{k-1})]\sin(2n+1)\pi\xi\sin(2n+1)^2\pi^2 a(t-\sigma)}{a\pi^2(2n+1)^2}d\xi+$$

$$+2\int_0^1 d\sigma\int_0^1 \frac{[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z_{k-1})]\sin(2n+1)\pi\xi\cos(2n+1)^2\pi^2 a(t-\sigma+{}^1/_2)}{a\pi^2(2n+1)^2\sin\frac{(2n+1)^2\pi^2 a}{2}}d\xi.$$

Итак, мы имеем последовательность функции

$$Z_1(x,t),\ Z_2(x,t)\ldots,Z_k(x,t),\ldots,\tag{6}$$

непрерывных со своими частными производными до четвертого порядка в области $\overline{D}$ и удовлетворяющих условиям (2).

Нетрудно убедиться, что функции последовательности (6) равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в замкнутой области $D_1\in\overline{D}$.

Тогда, согласно теореме Арцела [2], мы можем выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность из последовательности (6). Пусть выбранная подпоследовательность будет:

$$Z_{m_1},\ Z_{m_2},\ldots,\ Z_{m_k},\ldots\tag{7}$$

В силу теоремы Арцела имеем

$$\lim_{k\to\infty} Z_{m_k}(x,t)=Z(x,t),$$

где $Z(x,t)$ — непрерывная функция в замкнутой области $\overline{D}$, которую можно написать в виде

$$Z(x,t)=2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t d\sigma\int_0^1\frac{[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)]\sin(2n+1)\pi x\sin(2n+1)\pi\xi\sin(2n+1)^2\pi^2 a(t-\sigma)}{a\pi^2(2n+1)^2}d\xi+$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\frac{[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)]\sin(2n+1)\pi x\sin(2n+1)\pi\xi\cos(2n+1)^2\pi a^2(t-\sigma+{}^1/_2)}{a\pi^2(2n+1)^2\sin\frac{(2n+1)^2\pi^2 a}{2}}d\xi.$$

Из выражения (8) легко видеть, что $Z(x,t)$ есть функция ограниченной вариации по первому и по второму аргументам.

Далее легко доказывается сходимость рядов для $\partial^4 Z/\partial x^4$ и $\partial^2 Z/\partial t^2$. Тем самым теорема доказана.

Институт механики и математики
Академии Наук Уз. ССР

Поступило
15 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Соловьев, ДАН, **25**, № 9 (1939). [2] В. В. Немыцкий, Усп. математ. наук, в. 1, 157 (1936).