Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 7

МАТЕМАТИКА

Л. БОРУХОВ

# ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЯДРОМ И СВОБОДНЫМ ЧЛЕНОМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 III 1947)

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода, видоизмененное в соответствии с основным свойством почти периодической функции иметь среднее значение на всей оси:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda \underset{s}{L}[K(x, s)\varphi(s)], \qquad (1)$$

где

$$\underset{s}{L}[K(x, s)\varphi(s)]=\lim_{T\to\infty}\int_0^T K(x, s)\varphi(s)\,ds,$$

и докажем возможность переноса результатов Фредгольма на уравнение (1).

Доказательство проводится при следующих предположениях:

1) $f(x)$ — почти периодическая функция по Бору, причем

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|=A;$$

2) $K(x, s)$ — почти периодическая функция по совокупности $x$, $s$ и

$$\sup_{-\infty<x,\, s<+\infty}|K(x, s)|=M.$$

§ 1. Рассмотрим уравнение:

$$\varphi_T(x)=f(x)+\lambda \underset{s}{L}_T[K(x, s)\varphi_T(s)], \qquad (2)$$

где

$$\underset{s}{L}_T[K(x, s)\varphi_T(s)]=\frac{1}{T}\int_0^T K(x, s)\varphi_T(s)\,ds.$$

Для каждого фиксированного $T$ решение $\varphi_T(x)$ существует и единственно. Оно имеет вид:

$$\varphi_T(x)=f(x)+\frac{\lambda}{T}\int_0^T R_T(x, s, \lambda) f(s)\,ds, \qquad (3)$$

где

$$R_T(x, s, \lambda)=\frac{D_T(x, s, \lambda)}{D_T(\lambda)}.$$

Рассмотрим последовательность чисел $T_1, T_2, \ldots, T_n\to\infty$ и, соответственно, последовательность $D_{T_n}(\lambda)$ в круге $|\lambda|\leqslant\lambda_1$ ($\lambda_1$ константа $>0$) плоскости комплексного переменного $\lambda$.

Теорема. *Последовательность функций $D_{T_n}(\lambda)$ в круге $|\lambda| < \lambda_1$:* 1) *равномерно ограничена;* 2) *равностепенно непрерывна.*

Доказательство. Первое следует из наличия мажорантного ряда $\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{Me|\lambda|}{\sqrt{m}}\right]^m$ для последовательности функций $D_{T_n}(\lambda)$, сходящегося для каждого конечного $\lambda$. Пусть при $\lambda=\lambda_1$ его сумма равна $B$.

Так как $D_{T_n}(\lambda)$ суть равномерно сходящиеся ряды, то они представляют собой аналитические функции в области $|\lambda| \leqslant \lambda_1$, а потому:

$$\left|D'_{T_n}(\lambda)\right| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{D_{T_n}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-\lambda)^2}\right| \leqslant \frac{B}{\lambda_1}.$$

Из равномерной ограниченности по $T$ $D'_{T_n}(\lambda)$ непосредственно следует равностепенная непрерывность функций $D_{T_n}(\lambda)$. Действительно:

$$|D_{T_n}(\lambda+\Delta\lambda) - D_{T_n}(\lambda)| \leqslant \left|\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} D'_{T_n}(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \frac{B}{\lambda_1}\Delta\lambda \leqslant \varepsilon,$$

как только

$$\Delta\lambda \leqslant \frac{\varepsilon\lambda_1}{B}.$$

Доказанные свойства последовательности $D_{T_n}(\lambda)$ по теореме Арцела позволяют выделить из нее подпоследовательность $D^{(1)}_{T_n}(\lambda)$, равномерно сходящуюся к пределу $D(\lambda)$ при $T\to\infty$ в круге $|\lambda| \leqslant \lambda_1$.

Построим последовательность чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \to \infty$.

Рассмотрим последовательность $D^{(1)}_{T_n}(\lambda)$ в круге $|\lambda| \leqslant |\lambda_2|$. В силу выполнения свойств 1), 2) можно из $D^{(1)}_{T_n}(\lambda)$ выбрать подпоследовательность $D^{(2)}_{T_n}(\lambda)$, равномерно сходящуюся к $D(\lambda)$ в круге $|\lambda| \leqslant \lambda_2$.

Из $D^{(2)}_{T_n}(\lambda)$ в круге $|\lambda| \leqslant \lambda_3$ снова выберем подпоследовательность $D^{(3)}_{T_n}(\lambda)$, равномерно сходящуюся к пределу, и т. д., продолжаем этот процесс неограниченно.

Теперь построим диагональную подпоследовательность $D^{(k)}_{T_n}(\lambda)$, равномерно сходящуюся к $D(\lambda)$ уже в любой конечной области $|\lambda| \leqslant \mathrm{const}$.

Тем же способом получим: последовательность почти периодических функций $D_{T_n}(x, s, \lambda)$ равномерно сходится к $D(x, s, \lambda)$.

Равномерная сходимость к пределам $D_{T_n}(\lambda)$ и $D_{T_n}(x, s, \lambda)$ влечет за собою равномерную сходимость в той же области $R_{T_n}(x, s, \lambda)$ к $R(x, s, \lambda)$. Поэтому в равенстве (3) можно перейти к пределу по $T$ под знаком интеграла и получить явное выражение для решения уравнения (1).

Ясно, что решение $\varphi(x)$ будет почти периодической функцией.

Все сказанное, очевидно, справедливо для $\lambda \neq \lambda_0$ $(D(\lambda_0)=0)$, ибо, в силу равномерной сходимости $D_{T_n}(\lambda)$ к $D(\lambda)$, при достаточно больших $T$ также $D_{T_n}(\lambda) \neq 0$, и равенство (3) имеет смысл.

На основании доказанной равномерной сходимости $R_{T_n}(x, s, \lambda)$ к $R(x, s, \lambda)$ в уравнениях Фредгольма для $R_{T_n}(x, s, \lambda)$ можно перейти к пределу по $T$. Полученные уравнения резольвенты $R(x, s, \lambda)$ позволяют доказать единственность решения и сформулировать первую теорему Фредгольма для уравнения (1).

§ 2. Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \underset{s}{L} [K(x, s) \varphi(s)]. \tag{4}$$

Если $\lambda \neq \lambda_0$, то, по первой теореме Фредгольма, уравнение (4) не имеет решений, кроме тривиального.

Если $\lambda = \lambda_0$, то, следуя методу Фредгольма, покажем существование нетривиального решения уравнения (4) в виде почти периодической функции, а введя миноры $P$-го порядка, придем ко второй теореме Фредгольма.

Наконец, определив ортогональность двух почти периодических функций равенством $\underset{s}{L} [\varphi(s) \psi(s)] = 0$, мы получим все результаты относительно ортогональности решений уравнения (1) и придем к третьей теореме Фредгольма, выполнив задачу настоящей работы.

Научно-исследовательский институт
механики и физики
Саратовского
государственного университета

Поступило
15 VI 1946