Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 7

МАТЕМАТИКА

Г. П. АКИЛОВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 15 III 1947)

1. В настоящей заметке сообщаются результаты исследования некоторых проблем, относящихся к распространению линейных операций.

Проблема 1. Каким условиям должно удовлетворять линейное нормированное пространство X_0 (кратко, $X_0 \in B^-$, по поводу этих обозначений см.([2])), чтобы для всякого $X_0 \in B^-$, $X \supset X_0$ и $Y \in B^-$ и линейной операции U_0, отображающей X_0 в Y, существовала такая линейная операция U, отображающая X в Y, что

$$U(x)=U_0(x) \quad \text{для} \quad x \in X_0; \quad \|U\|=\|U_0\|. \tag{1}$$

Проблема 2. Каким условиям должно удовлетворять пространство $Y \in B^-$, чтобы для всяких $X_0, X \in B$, $X_0 \subset X$, и операции U_0, отображающей X_0 в Y, существовала операция U, отображающая X в Y и удовлетворяющая условиям (1).

В дальнейшем, для краткости, будем говорить о пространствах, дающих решение проблемы 1, соответственно, проблемы 2, что они обладают свойством (E_0), соответственно, свойством (E_y).

Если под проекцией пространства $X \in B^-$ на линейное замкнутое подпространство X_0 понимать, как обычно (см. ([4])), линейную операцию P такую, что $P(X)=X_0$ и $P^2=P$, то легко видеть (см., например, ([4,5])), что для того, чтобы X_0 обладало свойством (E_0), необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было линейное нормированное пространство $X \supset X_0$, существовала бы проекция P пространства X на X_0 с $\|P\|=1$.

2. Нормированное K-пространство X (линейное полуупорядоченное пространство, см. ([1-3])) будем называть пространством типа B_1^+ $(X \in B_1^+)$, если X одновременно типа B_1 и типа K_5 (см.([2])).

Определение 1. Пусть X — пространство типа B_1. Характеристикой его будем называть число ρ, определенное так: $\rho=\frac{1}{\|\sup K\|}$, если K — единичная сфера пространства X — ограничена и supremum существует, и $\rho=1$ во всех остальных случаях.

Если, кроме того, X типа B_1^+, а $\rho=1$, то X будет называться пространством типа $\mathfrak{M}$ $(X \in \mathfrak{M})$.

Теорема 1. *Пространства типа $\mathfrak{M}$ обладают свойством (E_0).*

Теорема 2. *Пространства типа $\mathfrak{M}$ обладают свойством (E_y).*

Обе теоремы непосредственно следуют из приводимой ниже теоремы Л. В. Канторовича ([3]).

Теорема Л. В. Канторовича. *Если X и $X_0 \subset X$ — пространства типа B^-, $Y \in K_5^+$ и U_0 — операция класса H_b^0 (т. е. такая, что из $x_n \to x$ по норме вытекает $U_0(x_n) \to U(x)(0)$; подробнее см. ([2])),* *отображающая X_0 в Y, то существует операция U тоже класса $H_{\text{в}}^{\circ}$, отображающая X в Y, совпадающая с U_0 на X_0 и имеющая ту же абстрактную норму (наименьшее $y_0 \in Y$, удовлетворяющее неравенству $|U(x)| \leqslant y_0 \|x\|$, $x \in X$, см.*[2]).

Для доказательства обеих теорем нужно еще заметить, что в случае заранее гарантированного наличия у операции U_0 абстрактной нормы условие $Y \in K_5^+$ может быть заменено на $Y \in K_5$.

В случае теоремы 1 надо применить теорему Л. В. Канторовича к тождественной операции в X_0, в случае теоремы 2 — к самой операции U_0.

Следствие*. Каковы бы ни были пространства типа B^-: X, $X_0 \subset X$ и Y, существует пространство $\overline{Y} \supset Y$, зависящее только от Y, такое, что для всякой операции U_0, отображающей X_0 в Y, найдется операция U, отображающая X в $\overline{Y}$ и удовлетворяющая условиям (1).

В самом деле, в качестве $\overline{Y}$ достаточно взять пространство всех ограниченных функций на единичной сфере сопряженного к Y пространства, оно будет пространством типа $\mathfrak{M}$, если норму и упорядоченность ввести обычным образом.

3. Условие теоремы 1 разбивается на два: a) $X_0 \in B_{\mathrm{I}}^+$, b) $\rho = 1$. Оба эти условия существенны. Чтобы убедиться в существенности условия a), достаточно взять за X_0 пространство C непрерывных функций на $[0, 1]$ с обычной нормировкой и упорядоченностью. В качестве X следует взять M-пространство ограниченных функций на $[0, 1]$. X_0 будет типа B_1 (но не B_{I}^+). Характеристика X_0 $\rho = 1$. Тем не менее, нетрудно доказать, что не существует проекции пространства X на X_0 с единичной нормой, и тем самым доказать, что X_0 не обладает свойством (E_0).

4. Определение 2. Пространство $X \in B_{\mathrm{I}}^+$ будем называть квази-равномерно выпуклым, если существует $\eta > 0$ такое, что, каковы бы ни были положительные дизъюнктные элементы $x_1, x_2 \in X$ (элементы x и y называются дизъюнктными, если $\inf(|x|; |y|) = 0$) с $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, имеет место

$$\|x_1 + x_2\| \leqslant 2 - \eta. \tag{2}$$

Числа $\eta > 0$, удовлетворяющие (2), будем называть допустимыми.

Замечание. Если $X \in B_{\mathrm{I}}^+$ и равномерно выпукло, то X квази-равномерно выпукло. (Равномерно выпуклым называется линейное нормированное пространство X, обладающее свойством: каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\zeta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только для двух элементов x $y \in X$ выполнено $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$, так $\|x + y\| \leqslant 2 - \zeta(\varepsilon)$, см. [8]).

В самом деле, если $x_1, x_2 \in X$ — дизъюнктные положительные элементы с $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, то

$$\|x_1 - x_2\| = \|\,|x_1 - x_2|\,\| = \|\,|x_1| + |x_2|\,\| \geqslant \|\,|x_1|\,\| = \|x_1\| = 1,$$

поэтому в качестве η можно взять $\zeta(1)$.

Теорема 3. *Пусть X_0 — регулярное** квази-равномерно выпуклое*

---

* Приведенное утверждение доказано впервые Fillips'ом [6] и после него Sobczyk'ом [7].

** Регулярность X_0 понимается в смысле совпадения X_0 и X_0^{**} — второго сопряженного к X_0 пространства.

пространство с характеристикой ρ. Если существует допустимое η такое, что

$$\frac{\eta}{(2-\eta)^2} > \rho,$$

то X_0 не обладает свойством (E_0).

Доказательство теоремы 3 основывается на следующих леммах, первая из которых принадлежит А. Г. Пинскеру.

Лемма 1. *Пусть X—пространство типа B_1^+. Если $x_0 \in X$ такой элемент, что для всякого положительного функционала f (т. е. такого, что $f(x) \geqslant 0$ для каждого $x \geqslant 0$) $f(x_0) \geqslant 0$, то $x_0 \geqslant 0$.*

Пространство X^* — сопряженное к пространству $X \in B_1^+$ — само будет типа B_1^+, если считать $f > 0$ тогда и только тогда, когда f положителен (в определенном выше смысле) и отличен от нуля. Следуя далее, можно подобным же образом ввести частичную упорядоченность в X^{**} и т. д.

Следствие. Если X типа B_1^+ — регулярное пространство, то соответствие $F_x \longleftrightarrow x$ по формуле: $F_x(f) = f(x)$; $F_x \in X^{**}$, $f \in X^*$, $x \in X$ определяет не только метрическую эквивалентность пространств X и X^{**}, но и их изоморфизм как полуупорядоченных пространств.

Лемма 2. *Пусть X пространство типа B_1^+ с характеристикой ρ. Если $\rho' = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x>0}} \{\inf\limits_{\substack{\|f\|=1 \\ f>0}} f(x)\}$ $x \in X$, $f \in X^*$, то $\rho = \rho'$.*

Лемма 3. *Пусть X—регулярное (в смысле, указанном выше) квази-равномерно выпуклое пространство. Если f_1 и f_2—положительные дизъюнктные функционалы, то $\|f_1\| + \|f_2\| \leqslant (2-\eta)\|f_1+f_2\|$, где η—любое допустимое число.*

Следствие 1. Пространство Y, удовлетворяющее условиям теоремы 3, не обладает свойством (E_y).

Будем называть вместе с Murray'ем ([4]) пространством $l_{p,n}$ совокупность всех комплексов вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ с

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p}.$$

Следствие 2. Пространства L_p, l_p и $l_{p,n}$ при достаточно больших n, $1 < p < +\infty$, не обладают свойством (E_0).

В самом деле, $L_p, l_p, l_{p,n}$, $1 < p < +\infty$, становятся квази-равномерно выпуклыми пространствами, если ввести упорядоченность обычным образом (за η можно взять число $2-2^{1/p}$). В случае L_p и l_p характеристика $\rho = 0$, в случае $l_{p,n}$ характеристика $\rho_n \to 0$, когда $n \to \infty$.

В частности, если $p=2$, сформулированное для $l_{p,n}$ утверждение имеет место для $n > 12$.

Следствие 3. Если в пространстве X можно указать 13 линейно независимых элементов, то существует линейное замкнутое подпространство $X_0 \subset X$, не обладающее свойством (E_0).

Действительно, если X не унитарное пространство (унитарным называется пространство с нормой, удовлетворяющей условию: $\|x + y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ для всякой пары элементов x, y), то это следует из результата Kakutani ([5]). Если же X — унитарное пространство, то линейная оболочка 13 линейно независимых элементов будет пространством $l_{2,13}$, которое, по предыдущему, не обладает свойством (E_0).

Замечание. Проблемы, подобные проблемам 1 и 2, получаются, если в условии (1) заменить равенство $\|U\|=\|U_0\|$ неравенством $\|U\|\leqslant N\|U_0\|$, где $N\geqslant 1$ — некоторое вещественное число, или вовсе отбросить его. Очевидно, пространства с характеристикой $\rho\geqslant 1/N$ дают решение проблем 1 и 2 в такой видоизмененной форме. Если $N<2$, то несущественными изменениями в доказательстве может быть получена теорема, аналогичная теореме 3.

Поступило
15 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Kantorovitch, Мат. сб., **2** (44): 1, 121 (1937). [2] L. Kantorovitch, Мат. сб., **7** (49): 2, 209 (1940). [3] Л. Канторович, ДАН, **1**, 283 (1936). [4] F. Murray, Trans. Am. Math. Soc., **41**, 138 (1937). [5] Sh. Kakutani, Jap. J. Math., **16**, 93 (1939). [6] R. Fillips, Trans. Am. Math. Soc., **55**, 153 (1944). [7] A. Sobczyk, Trans. Am. Math. Soc., **55**, 153 (1944). [8] J. Clarkson, Trans. Am. Math. Soc., **40**, 396 (1936).