Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 3

ГЕОФИЗИКА

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ СЛОЖНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА

Тринадцать лет назад нами было доказано [1], что энергия потока параллельных световых лучей, проходящих сквозь сильно рассеивающую (но не поглощающую) среду, убывает не по закону Буге, а по некоторому гиперболическому закону:

$$J_0=0{,}45\frac{I_0}{\sqrt{R}}. \tag{1}$$

Здесь через R обозначен путь световых лучей в данной среде, выраженный не в линейных, а в безразмерных единицах—„релеях". Если коэффициент рассеяния равен k, а длина пути в линейных единицах dx, то длина пути в релеях будет: $dR=kdx$.

Одновременно было обнаружено, что зависимость (1) выполняется, начиная от $R=0{,}5$ и до самых больших значений R, до которых доводились расчеты,—до $R=90$. Между $R=0$ и $R=0{,}5$ лежит этап, переходный от начального, описываемого законом Буге, и до того, на котором устанавливается режим (1). В цитированной работе, кроме основного потока, были исследованы также потоки рассеянного света, условно считаемые потоками первого, второго, третьего порядков и так далее—до восьмого порядка. Энергия каждого из этих потоков по мере углубления в среду нарастает от нуля до некоторого максимального значения, различного для каждого порядка, а вслед затем—начинает уменьшаться. Пройдя достаточно длинный путь, все эти потоки ведут себя чрезвычайно любопытно: энергия рассеянного света, непрерывно убывающая на пути, распределяется между ними в совершенно определенной и не меняющейся пропорции; при этом энергия каждого из них убывает по гиперболическому закону, отличающемуся от (1) только постоянным множителем перед дробью.

Ввиду очень большой сложности задачи о многократном рассеянии света все указанные закономерности были выведены приближенным числовым методом. За многие годы, истекшие с тех пор, никем не было дано уточненное аналитическое решение. Между тем, основные положения нашей теории сложного рассеяния света получили в самое последнее время достаточно убедительное подтверждение в опытах Тимофеевой на Черноморской гидрофизической станции.

В связи с этими двумя обстоятельствами нам кажется уместным вернуться к результатам приближенного числового решения и попытаться найти новые закономерности в ходе рассеяния высоких порядков. Быть может, новые закономерности, которым посвящена настоящая статья, натолкнут кого-либо на правильный косвенный путь уточненного решения, поскольку целый ряд попыток различных авторов итти прямым классическим путем привел к результатам, противоречащим непосредственному эксперименту.

Обозначим через y_n отношение энергии потока n-го порядка к энергии света, входящего в рассеивающую среду. В частности, y_0 будет представлять собой указанное отношение, вычисленное для основного потока параллельных лучей, углубившегося в среду на расстояние R. Оставляя исследование y_0 на конец статьи, попытаемся описать все остальные потоки одним общим уравнением, содержащим два неопределенных параметра; именно, положим, что

$$y_n = A_n (1 - e^{-\beta R}) R^{-1/2}. \tag{2}$$

Если через R_m обозначим расстояние, на котором поток n-го порядка достигает максимального значения, то, дифференцируя (2), находим, что

$$2\beta R_m = e^{\beta R_m} - 1,$$

откуда:

$$\beta = 1{,}25 / R_m. \tag{3}$$

Подстановка числового значения произведения βR_m из (3) в (2) дает:

$$(y_n)_{\max} = \frac{2 A_n \beta R_m}{(2\beta R_m + 1)\sqrt{R_m}} = 0{,}76 \frac{A_n}{\sqrt{R_m}},$$

откуда

$$A_n = 1{,}4 (y_n)_{\max} \sqrt{R_m}. \tag{4}$$

Для проверки пригодности общего уравнения (2) необходимо испытать, удовлетворяет ли оно предельным условиям при подобном значении параметра A_n. Так как предельное условие при $R=0$ автоматически удовлетворяется при всех значениях параметров A_n и β, то остается испытать поведение (2) при $\lim R = \infty$.

Легко видеть, что кривая $y_n = f(R)$ при этом асимптотически приближается к гиперболе третьего порядка типа (1). Но выше отмечалось, что, по нашей теории, именно так ведут себя вычисленные потоки всех порядков. Однако надо еще убедиться, насколько близким к теоретическому оказывается отношение энергий отдельных потоков различных порядков.

Пусть $\lim \left(\frac{y_n}{y_0}\right)$ обозначает теоретическую величину такого отношения для потока n-го порядка. Тогда, по теории:

$$\lim \left(\frac{y_n}{y_0}\right) = \frac{A_n}{A_0},$$

или, иначе,

$$A_n \lim \left(\frac{y_0}{y_n}\right) = A_0 = \text{const}. \tag{5}$$

В совокупности с (4) это дает контрольное соотношение:

$$1{,}4 (y_n)_{\max} \sqrt{R_m} \lim \left(\frac{y_0}{y_n}\right) = A_0. \tag{6}$$

Подставим в него числовые значения $(y_n)_{\max}$, R_m и $\lim \left(\frac{y_0}{y_n}\right)$, взятые из цитированной нашей работы. Тогда окажется, что для всех восьми порядков рассеяния света формула (6) дает значения, отличающиеся от некоторого среднего на несколько процентов. При этом максимальные отклонения от среднего не превышают 16%, а сама средняя величина A_0, получающаяся на основании (6), оказывается равной 0,43. Другими словами, она лишь на 4,5% отличается от теоретического значения коэффициента $A_0 = 0{,}45$, фигурирующего в формуле (1).

Определим теперь значение второго параметра, β. Для этого рассмотрим закон нарастания R_m вместе с повышением порядка n на

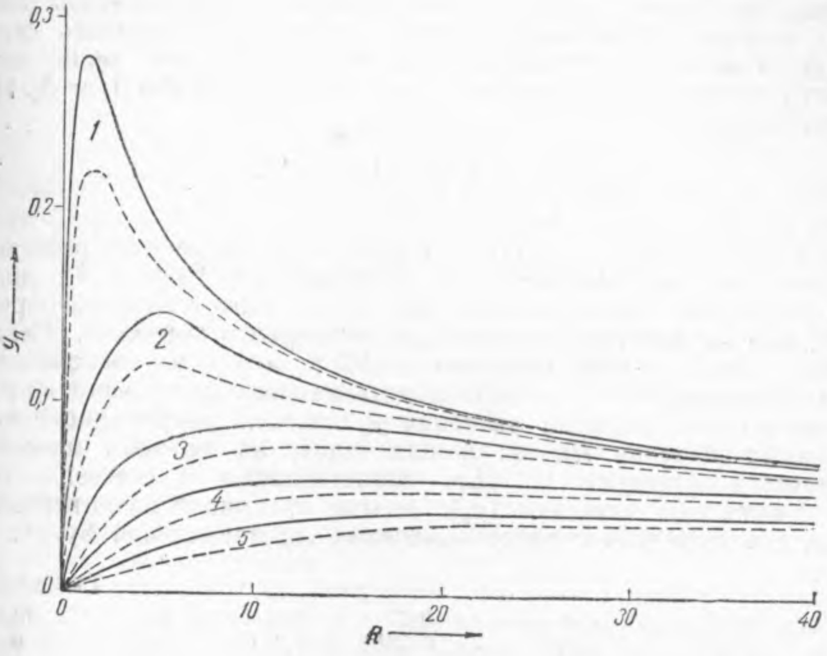

Рис. 1.

основании материала цитированной работы. Подобное рассмотрение показывает, что R_m меняется пропорционально квадрату n:

$$R_m = 1{,}25 n^2. \tag{7}$$

Для значений $n = 2, 4$ и 8 соотношение (7) дает полное совпадение с материалом цитированной работы. Для остальных — отклонения составляют от 3 до 12%. Но из (7) и (3) вытекает:

$$\beta = 1 / n^2. \tag{8}$$

Следовательно, вместо уравнения с неопределенными параметрами (2) теперь можно будет записать окончательно:

$$y_n = \frac{A_n}{\sqrt{R}}\left(1 - e^{-R/n^2}\right), \tag{9}$$

причем A_n определяется, в свою очередь, соотношением (5) по „асимптотическим“ значениям y_0 / y_n, заимствованным из цитированной работы.

На рис. 1 кривые, вычисленные по формуле (9), нанесены на диаграмму сплошными линиями. Для сопоставления на ту же диаграмму перенесены с логарифмической сетки из цитированной работы соответствующие кривые, полученные по нашей теории. Как видим, согласие между ними — удовлетворительное, несмотря на грубо приближенный метод численного решения задачи и на крайнюю простоту строения формулы (9). На этом основании закономерность, описываемую формулой (9), можно считать весьма близкой к истине.

Исходя из нее, попытаемся теперь истолковать физический смысл соотношения (1), найденного для основного потока параллельных лучей. В отличие от других, этот поток должен слагаться из двух составляющих: 1) составляющей, которую дает закон Буге для простого рассеяния, т. е. величины e^{-R}; 2) составляющей, обязанной своим происхождением рассеянному свету, который поступает со стороны, по схеме „вилки", изображенной в цитированной работе. Но эту вторую составляющую можно попытаться выразить формулой (2), в которой останется пока неопределенным лишь второй параметр β, поскольку очевидно, что в данном случае $A_n = A_0$. Итак, следует полагать, что

$$y_0 = e^{-R} + \frac{A_0}{\sqrt{R}}(1 - e^{-\beta_0 R}). \tag{10}$$

По схеме „вилок", принятой в цитированной работе, рассеянный свет, который присоединяется к составляющей Буге (e^{-R}), должен здесь вести себя примерно так, как ведет „поток второго порядка" ($n=2$), ибо их вместе порождает „поток первого порядка". Следовательно, можно грубо положить в (10) $\beta_0 = {}^1/_4$ на основании (8). Тогда, вспомнив, что $A_0 = 0{,}45$ и подставляя числовые значения в (10), получим по этой формуле значения y_0 как для „переходного этапа" (для малых значений R), так и для этапа, на котором может уже применяться формула (1). Для сопоставления в третьей строчке табл. 1 выписаны значения $[y_0]$, взятые с кривой из цитированной статьи, а в четвертой строчке — значения „составляющей Буге".

Таблица 1

R	0,2	0,4	0,7	1,0	1,5	10,0
y_0	0,867	0,737	0,581	0,467	0,323	0,131
$[y_0]$	0,86	0,73	0,52	0,45	0,36	0,13
e^{-R}	0,818	0,670	0,496	0,368	0,223	$4{,}6 \cdot 10^{-5}$

Как видим, формула (10), исходящая из общей принципиальной схемы этой статьи, дает вполне удовлетворительное совпадение с результатами расчетов в цитированной работе. Напротив, „составляющая Буге" не рисует истинной картины даже при сравнительно небольших значениях R. При больших R, разумеется, эта составляющая становится совсем ничтожной, и вся энергия, идущая в направлении основного потока, определяется вторым членом формулы (10), причем вся формула (10) стремится к виду (1).

Черноморская
гидрофизическая станция
Академии Наук СССР

Поступило
14 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Шулейкин, Журн. геофизики, 3, в. 3—5 (1933); Он же, Физика моря, 1941, стр. 490.