Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

З. И. ХАЛИЛОВ

ЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НОРМИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VII 1947)

В работе изучается класс линейных уравнений в нормированных кольцах, который охватывает сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши ([1]).

§ 1. Пусть $\mathfrak{R}$ — нормированное кольцо элементов $f, g, \ldots$, т. е. $\mathfrak{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, удовлетворяющее условиям:

1) для элементов $\mathfrak{R}$ установлено умножение на комплексные числа $\lambda, \mu, \ldots$, для которого выполнены условия: a) $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$, b) $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$, c) $\lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$, d) $1\cdot f=f$;

2) в $\mathfrak{R}$ определено скалярное произведение, удовлетворяющее условиям: a) $(g, f)=\overline{(f, g)}$, b) $(f_1+f_2, g)=(f_1, g)+(f_2, g)$, c) $(\lambda f, g)=\lambda(f, g)$, d) если $f\neq 0$, то $(f, f)>0$, e) $(f, gh)=(fg^*, h)$, g^* — некоторый элемент $\mathfrak{R}$; $\sqrt{(f, f)}$ будем называть нормой элемента f и обозначать через $\|f\|$; нуль и единицу $\mathfrak{R}$ будем обозначать через 0, e, соответственно;

3) $\mathfrak{R}$ — полное пространство*.

§ 2. Рассмотрим оператор S, действующий в $\mathfrak{R}$ и удовлетворяющий условиям: 1) $S(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1 S(f_1)+\lambda_2 S(f_2)$ (дистрибутивность); 2) некоторые итерации операторов ST и TS, где T — произвольный линейный оператор, некоторая итерация которого есть вполне непрерывный оператор, суть вполне непрерывные; 3) $S^2=E$, где E — тождественное преобразование; 4) некоторая итерация оператора $(Sf-fS)$, $f\in\mathfrak{R}$, вполне непрерывный оператор**; 5) $(f, Sg)=(S'(f), g)$ для всех f и g из $\mathfrak{R}$, S' удовлетворяет условиям 1), 2), 3), 4).

Оператор S будем называть сингулярным***.

Примеры. 1. Примером оператора S может служить интегральный оператор $\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$, действующий в кольце функций $\varphi(t)$, $t\in L$, удовлетворяющих условию Hölder'a, где L — замкнутый контур ([1]).

2. Пусть M — любое измеримое множество на числовой прямой. Заданные на M комплексные функции $f(t)$, для которых интеграл Лебега $\int\limits_M |f(t)|^2\,dt$ конечен, образуют нормированное кольцо типа $\mathfrak{R}$, если операции суть обычные операции над функциями, а скалярное произведение двух функций есть $(f, g)=\int\limits_M f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Очевидно, g^* в этом кольце есть $\overline{g(t)}$. Оператор $S(f)=-f(t)$ — сингулярный****.

* Очевидно, $\mathfrak{R}$ — унитарное пространство.

** Под Sf и fS понимается $Sf(\varphi)=S(f\varphi)$, $fS(\varphi)$, соответственно.

*** Принятые условия для S могут быть заменены другими.

**** Кроме указанных, можно привести и другие примеры нормированных колец $\mathfrak{R}$ и сингулярных операторов в них.

Легко доказываются теоремы:

Теорема 1. *$Sg(f)=T(f)+gS(f)$, где T — линейный оператор, некоторая итерация которого есть вполне непрерывный оператор.*

Теорема 2. *$SgSf=gf+T(f)$, где T — оператор, некоторая итерация которого есть вполне непрерывный оператор* (формула Пуанкаре-Бертрана).

Теорема 3. *Если $S(f)=g$, то $f=S(g)$* (формула обращения оператора S).

§ 3. Рассмотрим сингулярное уравнение:

$$K(f)\equiv\varphi f+\psi S(f)+T(f)=g, \tag{1}$$

где φ, ψ, g — заданные элементы $\in\mathfrak{R}$, f — искомый элемент $\in\mathfrak{R}$, S — сингулярный оператор, T — линейный оператор, некоторая итерация которого есть вполне непрерывный оператор.

Если $\psi=0$, то уравнение (1) — уравнение типа Riesz — Schauder'a, если предположить, что φ имеет обратный элемент. В этом случае уравнение (1) будем называть регулярным и будем писать

$$M(f)=g. \tag{2}$$

Оператор

$$K^*(f)\equiv\varphi f+\psi S(f) \tag{3}$$

будем называть характеристической частью оператора K.

Элементы $\Phi=\varphi+\psi$, $\Psi=\varphi-\psi$ будем называть основными элементами K или K^*.

§ 4. Рассмотрим оператор K_1 типа K:

$$K_1(f)\equiv\varphi_1 f+\psi_1 S(f)+T_1(f). \tag{4}$$

На основании теорем 1, 2 легко показать, что операторы K_1K и KK_1 такого же типа, как K, причем, если $K_1K=K_0$, то

$$\varphi_0=\varphi_1\varphi+\psi_1\psi,\quad \psi_0=\varphi_1\psi+\psi_1\varphi,\quad \Phi_0=\Phi_1\Phi,\quad \Psi_0=\Psi_1\Psi. \tag{5}$$

Аналогичный результат получается для KK_1.

Формулы (5) показывают, что *характеристическая часть K_0 определяется лишь характеристическими частями K и K_1.*

Очевидно, если известны характеристические части двух из K, K_1 и K_0, то, вообще говоря, можно найти третий.

Предположим, что основные элементы оператора K имеют обратные элементы.

Пусть даны K, K_0; тогда K_1 определяется формулами:

$$\Phi_1=\Phi_0\Phi^{-1},\quad \Psi_1=\Psi_0\Psi^{-1}, \tag{6}$$

откуда

$$\varphi_1={}^1/_2[\Phi_0\Phi^{-1}+\Psi_0\Psi^{-1}],\qquad \psi_1={}^1/_2[\Phi_0\Phi^{-1}-\Psi_0\Psi^{-1}].$$

При заданном K можно подобрать (бесконечным числом способов) такой оператор K_1, чтобы K_0 был регулярным. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $\Phi_0=\Psi_0$ (в частности, можно брать $\Phi_0=\Psi_0=e$).

Если K_1 такой, что K_0 является регулярным, то K_1 будем называть регуляризатором оператора K.

§ 5. Оператор K', удовлетворяющий условию:

$$(g, K(f))=(K'(g), f) \tag{7}$$

для всех $f, g \in \mathfrak{R}$, будем называть сопряженным с K.

Теорема 4. *K' есть оператор типа K.*

Уравнение

$$K'(f)=\chi \tag{8}$$

при любых χ будем называть сопряженным с уравнением (1).

Далее, очевидно, $(K, K)'=K' K_1'$.

Теоремы Фредгольма справедливы для регулярного уравнения $M(f)=g$, если под союзным уравнением понимать $M'(f)=g$.

§ 6. Докажем теперь теоремы, представляющие собою обобщения теорем F. Noether'a для сингулярных интегральных уравнений [1,2].

Теорема I. *Число линейно независимых решений однородного сингулярного уравнения $K(f)=0$ конечно.*

Теорема II. *Для существования решения сингулярного уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(g, h_i)=0, \quad i=1, 2, \ldots, k', \tag{9}$$

где h_i $(i=1, 2, \ldots, k')$ — полная система линейно независимых решений однородного сопряженного уравнения

$$K'(h)=0. \tag{10}$$

Теорема III. *Разность числа k линейно независимых решений однородного уравнения $K(f)=0$ и числа k' линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения $K'(f)=0$ зависит лишь от характеристической части оператора K.*

Доказательство теоремы I получается из того, что всякое решение уравнения $K(f)=0$ является решением регулярного уравнения $K_1 K(f)=0$, где K_1 — какой-нибудь регуляризатор оператора K.

Доказательство теоремы II. Необходимость условия (9) вытекает непосредственно из равенства (7). Докажем теперь достаточность. Пусть K_1 — регуляризатор оператора K. Всякое решение уравнения

$$K_1 K(f)=K_1(g) \tag{11}$$

является решением уравнения

$$K(f)=g+\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \xi_j, \tag{12}$$

где ξ_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ — полная система линейно независимых решений уравнения $K_1(\xi)=0$. Тогда всякое решение (11) будет решением (1), если все числа $\lambda_j=0$. Это необходимо и достаточно.

Используя необходимое и достаточное условие существования решения регулярного уравнения (11), находим: необходимые и достаточные условия решимости исходного интегрального уравнения выражаются конечным числом условий вида

$$(g, \chi_i)=0, \tag{13}$$

где χ_i — определенные, не зависящие от g элементы $\in \mathfrak{R}$.

Рассмотрим уравнение $K(f)=K(\omega)$, где ω — произвольный элемент $\in \mathfrak{R}$; оно имеет решение $f=\omega$. Тогда выполняется необходимое условие $(K(\omega), \chi_i)=0$, откуда, в силу (7), получаем $(\omega, K'(\chi_i))=0$ для всякого

ω. Следовательно, $K'(\chi_i)=0$, т. е. χ_i — линейная комбинация элементов h_i. Следовательно, условия (9) и (13) эквивалентны. Этим доказана теорема II.

Доказательство теоремы III. Пусть опять K_1 — регуляризатор. По теории регулярных уравнений $K_1K(f)=0$, $K'K_1'(f)=0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Пусть полные системы линейно независимых решений уравнений $K(f)=0$, $K'(g)=0$, $K_1(\chi)=0$, $K_1'(\omega)=0$ будут f_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, g_i $(i=1, 2, \ldots, k')$, χ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$, ω_i $(i=1, 2, \ldots, m')$ соответственно. Всякое решение $K_1K(f)$ есть решение уравнения:

$$K(f)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\chi_j. \tag{14}$$

Для существования решения (14) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{m}A_{ij}\lambda_j=0, \tag{15}$$

где $A_{ij}=(\chi_j, g_j)$. Тогда уравнение (14) можно писать в виде

$$K(f)=\sum_{j=1}^{m-r}\mu_j\xi_j, \tag{16}$$

где $r=$ ранг $\|A_{ij}\|$, ξ_j линейно независимы, μ_j — некоторые числа.

Решение (16) будет

$$f=\sum_{i=1}^{m-r}\mu_i\eta_i+\sum_{j=1}^{k}\nu_j f_j,$$

где η_i — какое-либо частное решение $K(\eta)=\xi_i$, η_i, f_j — линейно независимые элементы. Следовательно, $K_1K(f)=0$ имеет $m-r+k$ линейно независимых решений.

Подсчитывая аналогичным способом, получим, что число линейно независимых решений уравнения $K'K_1'(f)=0$ равняется $k'-r+m'$. Следовательно,

$$k-k'=m'-m. \tag{17}$$

Так как для всех операторов K, имеющих одну и ту же характеристическую часть, можно взять один и тот же регуляризатор, то $m'-m$ — постоянное. Этим доказана теорема III.

Число $\varkappa=k-k'$ будем называть индексом оператора K или K^*.

В теории сингулярных интегральных уравнений удается определить число $\varkappa$ непосредственно элементами φ и ψ оператора K [1].

Сектор математики
Академии Наук Азербайджанской ССР
г. Баку

Поступило
8 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946, 2; F. Noether, Math. Ann., 82 (1921).