Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 3

МАТЕМАТИКА

ШИ ДЗЕН ХУ

ТЕОРЕМА О РАСШИРЕНИИ ГОМОТОПИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 III 1947)

Топологические исследования часто приводят к задаче такого рода: даны топологические пространства X, Y, замкнутое множество $X_0 \subset X$ и некоторое отображение $f(X) \subset Y$; спрашивается, всякая ли частичная гомотопия* $f_t(X_0) \subset Y\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ этого отображения допускает расширение $f_t^*(X) \subset Y\;(0 \leqslant t \leqslant 1)$ такое, что $f_t^* = f$? Если Y есть абсолютный окрестностный ретракт (сокращенно ANR — absolute neighbourhood retract), а X — нормальное пространство, то теорема Borsuk'а (см. ([3]), стр. 86) дает положительное решение нашей задачи. Если наложить ограничение на X, потребовав, чтобы X было полиедром, а X_0 — подполиедром, то положительное решение задачи дается известной леммой (см. ([1]), стр. 501). J. H. C. Whitehead обобщил эту лемму на бесконечные полиедры (([5]), стр. 320). В настоящей заметке мы устанавливаем теорему, являющуюся обобщением и, вместе с тем, обращением указанной выше леммы для случая, когда X есть ANR. Эта теорема дает новую характеристику замкнутых множеств ANR в пространствах ANR.

Определение. Будем говорить, что подмножество X_0 топологического пространства X обладает в X свойством абсолютной расширимости гомотопий, если, каково бы ни было топологическое пространство Y, всякая частичная гомотопия $f_t(X_0) \subset Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ произвольного отображения $f(X) \subset Y$ обладает расширением $f_t^*(X) \subset Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ таким, что $f_0^* = f$.

Пусть T — замкнутое множество $(X_0 \times 0) \cup (X_0 \times I)$ в топологическом произведении $X \times I$, где I обозначает замкнутый интервал $[0,1]$ действительной прямой.

Теорема. *Если X есть* ANR, *а X_0 — его замкнутое подмножество, то следующие условия эквивалентны друг другу:*

(1) *X_0 обладает в X свойством абсолютной расширимости гомотопий.*

(2) *T есть ретракт пространства $X \times I$.*

(3) *T есть* ANR.

(4) *X_0 есть* ANR.

---

* Пусть $f(X) \subset Y$ есть непрерывное отображение пространства X в пространстве Y. Гомотопией называется непрерывное семейство отображений $f_t(X) \subset Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; f_t называется гомотопией отображения f, если $f_0 = f$. Частной гомотопией отображения f на множестве $X_0 \subset X$ называется гомотопия $f_t(X_0) \subset Y (0 \leqslant t \leqslant 1)$, определенная на множестве X_0 таким образом, что $f_0(x) = f(x)$ для всех $x \in X_0$. Расширением частичной гомотопии $f_t(X_0) \subset Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ на X называется такая гомотопия $f_t^*(X) \subset Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, что $f_t^*(x) = f_t(x)$ для всех $x \in X_0$ и всех t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Доказательство. Из (1) следует (2). Пусть $Y=T$, а $f(X)\subset T$ определено так:

$$f(x)=(x, 0)\in T \qquad (x\in X).$$

Определим частичную гомотопию $f_t(X_0)\subset T$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ отображения f, положив

$$f_t(x)=(x, t) \qquad (x\in X_0,\ 0\leqslant t\leqslant 1).$$

В силу (1) f_t обладает расширением $f_t^*(X)\subset T$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ таким, что $f_t^*=f$. Если определить отображение $\theta(X\times I)\subset T$, положив

$$\theta(x, t)=f_t^*(x) \qquad (x\in X,\ 0\leqslant t\leqslant 1),$$

то мы видим, что θ есть ретракция $X\times I$ в T.

Из (2) следует (3). Согласно теореме, принадлежащей Войдыславскому (см. ([6]), стр. 186), X может быть вложено, как замкнутое множество, в выпуклое подмножество Z некоторого банахова пространства F (см. ([2]), стр. 53). Согласно другому результату Войдыславского (см. ([6]), стр. 187), Z есть абсолютный ретракт. $X\times I$ естественным образом оказывается вложенным в $Z\times I$. Пусть π и τ — проекции $Z\times I$, соответственно, на Z и I. Пусть B — произвольное замкнутое подмножество некоторого произвольного метрического сепарабельного пространства C. Пусть, далее, $f(B)\subset T$ есть какое угодно отображение B в T. Положим $\varphi=\pi f$ и $\psi=\tau f$. Так как Z и I — абсолютные ретракты, то φ и ψ обладают, соответственно, расширениями $\varphi^*(C)\subset Z$ и $\psi^*(C)\subset I$ (см. ([4]), стр. 60). Так как X есть ANR, то существует некоторая окрестность* U множества X в Z и ретракция $\theta(U)\subset X$ этой окрестности U в X. Обозначим через V прообраз U при отображении φ^*; V является окрестностью множества B в C. Так как, в силу условия (2), T есть ретракт пространства $X\times I$, то существует ретракция $\eta(X\times I)\subset T$ пространства $X\times I$ в T. Определим отображение $f^*(V)\subset T$, положив

$$f^*(\xi)=\eta(\theta\varphi^*(\xi), \psi^*(\xi)) \quad (\xi\in V).$$

Очевидно, f^* есть расширение f на V, следовательно, T есть ANR (см. ([4]), стр. 60).

Из (3) следует (4). Отождествим X_0 с $X_0\times 1\subset T$. Пусть B — любое замкнутое подмножество произвольного метрического сепарабельного пространства C и пусть $f(B)\subset X_0$ есть произвольное отображение B в X_0. Так как T есть ANR, то существуют окрестность U множества B в C и некоторое расширение $g(U)\subset T$ отображения f на U. Обозначим через M подмножество множества T, состоящее из точек $(x, t)\in T$ с $t>0$; M есть, очевидно, некоторая окрестность множества X_0 в T. Пусть π есть проекция множества M на X_0, определённая равенством

$$\pi(x, t)=(x, 1) \qquad ((x, t)\in M).$$

Пусть $V=g^{-1}(M)\subset U$; тогда V есть некоторая окрестность B в C. Определим отображение $f^*(V)\subset X_0$, положив

$$f^*(\xi)=\pi g(\xi) \qquad (\xi\in V).$$

Очевидно, что f^* есть расширение отображения f на V, следовательно, X_0 есть ANR.

---

* Окрестностью множества M в пространстве R называется всякое открыто подмножество R, содержащее M.

Остается доказать основную часть нашей теоремы, именно, что из (4) следует (1).

Как в доказательстве, что из (2) вытекает (3), вложим X, как замкнутое множество, в выпуклое подмножество некоторого сепарабельного банахова пространства F. Так как X есть ANR, то существуют некоторая окрестность N множества X в Z и ретракция θ этой окрестности N в X. Выберем для каждого $x \in X$ некоторую сферическую* окрестность $U(x) \subset N$. Мы можем предположить, что диаметры всех $U(x)$ меньше единицы. Так как X_0 является ANR и замкнутым подмножеством X, то существуют некоторая окрестность N_0 множества X_0 в X и ретракция θ_0 этой окрестности N_0 в X_0. Из непрерывности θ_0 вытекает, что у всякой точки $x \in X_0$ есть окрестность $V(x)$ в X такая, что $V(x) \subset U(x) \cap N_0$ и θ_0 отображает $V(x)$ в $U(x)$. Пусть

$$M = \sum_{x \in X_0} V(x);$$

тогда M является окрестностью множества X_0 в X. Для любой точки $\xi \in M$ найдется точка $x \in X_0$ такая, что $\xi \in V(x)$ и, следовательно, ξ и $\theta_0(\xi)$ содержатся в $U(x)$. Будучи сферической окрестностью точки в выпуклом множестве Z, $U(x)$ сама выпукла. Пусть ξ_t обозначает точку прямолинейного отрезка**, соединяющего точки ξ и $\theta_0(\xi)$, причем

$$\rho(\xi, \xi_t) = t, \quad \text{если} \quad t \leqslant \rho(\xi, \theta_0(\xi)),$$
$$\xi_t = \theta_0(\xi), \quad \text{если} \quad t \geqslant \rho(\xi, \theta_0(\xi)),$$

где ρ — метрическая функция пространства F, содержащего Z.

Определим гомотопию $\varphi_t(M) \subset X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, положив

$$\varphi_t(\xi) = \theta(\xi_t) \quad (\xi \in M,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

При этом φ_0 есть тождественное отображение M, а $\varphi_t(\xi) = \theta_0(\xi)$, когда $t \geqslant \rho(\xi, \theta_0(\xi))$.

Пусть теперь $f(X) \subset Y$ есть любое отображение X, а $f_t(X_0) \subset Y$ есть произвольная гомотопия отображения f.

Определим гомотопию $g_t(M) \subset Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, положив

$$g_t(\xi) = \begin{cases} f\varphi_t(\xi), & \text{если} \quad t \leqslant \rho(\xi, \theta_0(\xi)), \\ f_{t-\rho}\varphi_t(\xi), & \text{если} \quad t \geqslant \rho = \rho(\xi, \theta_0(\xi)) \end{cases}$$

для любого $\xi \in M$ и любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда, очевидно,

$$g_0 = f \mid M, \quad f_t = g_t \mid X_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Так как X_0 и $X - M$ — непересекающиеся замкнутые множества, то можно определить на X действительную функцию

$$\mu(x) = \frac{\rho(x, X - M)}{\rho(x, X_0) + \rho(x, X - M)} \quad (x \in X),$$

---

* Сферическая окрестность точки x в метрическом пространстве R есть множество точек $y \in R$ таких, что расстояние $\rho(x, y)$ меньше некоторого заданного положительного числа ε.

** Прямолинейный отрезок, соединяющий точки ξ и η в банаховом пространстве F, есть множество точек вида $(1-t)\xi + t\eta$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Если $\xi_t = (1-t)\xi + t\eta$, то $\rho(\xi, \xi_t) = t\rho(\xi, \eta)$.

где $\rho(x, A)$ есть расстояние от точки x до подмножества A в X. Тогда $0 \leqslant \mu(x) \leqslant 1$ для всякого $x \in X$ и

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in X - M, \\ 1, & \text{если} \quad x \in X_0. \end{cases}$$

Определим гомотопию $f_t^*(X) \subset Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, положив

$$f_t^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in X - M, \\ g_{\mu(x)t}(x), & \text{если} \quad x \in M. \end{cases}$$

Очевидно, f_t^* является расширением частичной гомотопии f_t таким, что $f_0^* = f$. Следовательно, X_0 обладает свойством абсолютной расширимости гомотопий.

Наше доказательство полностью закончено.

Замечания. a) Эквивалентность условий (1) и (4) показывает, что свойство абсолютной расширимости гомотопий для замкнутых подмножест X_0 заданного пространства ANR служит характеристикой множеств X_0, являющихся ANR. Это есть характеристика в целом, поскольку в ней не фигурирует явно понятие окрестности.

b) Существование гомотопии $\varphi_t(M) \subset X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в доказательстве того, что из (4) вытекает (1), обобщает известную теорему (см. ([1]), стр. 343), доказанную первоначально только для замкнутых ANR:

Если X_0 есть замкнутое множество ANR пространства ANR X, то существуют окрестность M множества X_0 в X и гомотопия $\varphi_t(M) \subset X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ такие, что φ_0 есть тождественное отображение M, φ_1 есть ретракция M в X_0, а $\varphi_t(x) = x$ для всякого $x \in X_0$ и всякого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Мы доказали, кроме того, что $\varphi_t(\xi) = \varphi_1(\xi)$ для всякого $\xi \in M$ при $t \geqslant \rho(\xi, \varphi_1(\xi))$.

Манчестерский университет,
Англия

Поступило
10 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Alexandroff and Hopf, Topologie, I, Berlin, 1935. [2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. [3] Hurewicz and Wallman, Dimension Theory, Princeton, 1941. [4] S. Lefschetz, Topics in Topology, Princeton, 1942. [5] J. H. C. Whitehead, Proc. London Math. Soc. (2), **45**, 293 (1939). [6] M. Wojdyslawski, Fund. Math., **32**, 184 (1939).