Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

М. К. ФАГЕ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ОГРАНИЧЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 VII 1947)

§ 1. Установим способ обозначения для полуплоскостей комплексной плоскости. Пусть Δ есть какая-либо открытая (без граничной прямой Γ) комплексная полуплоскость. Направление на Γ, оставляющее Δ слева, будем считать положительным. Проведем через начало координат O прямую $\Pi \perp \Gamma$. Будем считать O началом координат на Π, а за положительное направление на Π примем направление внешней нормали к Δ. Центральными координатами полуплоскости Δ назовем: 1) угол ω, отсчитываемый от положительного направления действительной оси до положительного направления Π и считающийся положительным, если этот отсчет производится против часовой стрелки, и отрицательным при противоположном отсчете; 2) координату α точки P пересечения прямых Π и Γ относительно прямой Π (т. е. расстояние OP с соответствующим знаком). Первую координату (ω) назовем направлением полуплоскости Δ, вторую (α) — ее абсциссой. Полуплоскость Δ с центральными координатами ω, α будем обозначать $\Delta(\omega, \alpha)$. Очевидно, что полуплоскость, смежная с $\Delta(\omega, \alpha)$, будет равна $\Delta(\omega+\pi, -\alpha)$.

§ 2. Введем наше основное геометрическое понятие, используя для определения показательную функцию от оператора

$$e^{\lambda A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n A^n}{n!}$$

(λ — комплексное число).

Пусть A есть ограниченный линейный оператор в (несепарабельном) гильбертовом пространстве $\mathcal{E}$. Спектральным многообразием оператора A, соответствующим полуплоскости $\Delta(\omega, \alpha)$, назовем множество элементов пространства $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}_A(\omega, \alpha)=\{x,\ e^{\rho(e^{-i\omega}A-\alpha I)}x \rightharpoonup 0 \quad \text{при} \quad \rho\to\infty\},$$

где $\rightharpoonup$ означает слабую сходимость, I есть единичный оператор, а ρ есть действительная переменная (стремящаяся к $+\infty$). ω будет называться направлением спектрального многообразия $\mathcal{E}_A(\omega, \alpha)$, α — его абсциссой.

Говорят, что множество $\mathfrak{A}\subset\mathcal{E}$ инвариантно относительно оператора A или приводит оператор A, если из $h\in\mathfrak{A}$ следует $Ah\in\mathfrak{A}$.

Вот основные свойства спектральных многообразий:

Теорема 1. 1) *$\mathscr{E}_A(\omega, \alpha)$ есть линейное многообразие, приводящее любой* оператор B, перестановочный с A, в частности, приводящее A. 2) $\mathscr{E}_A(\omega, \alpha)$ есть монотонно неубывающая функция абсциссы α, т. е. из $\alpha \leqslant \beta$ следует $\mathscr{E}_A(\omega, \alpha) \subset \mathscr{E}_A(\omega, \beta)$, причем $\mathscr{E}_A(\omega, \alpha) = \{0\}$ при $-\infty < \alpha < -|A|$ и $\mathscr{E}_A(\omega, \alpha) = \mathscr{E}$ при $|A| < \alpha < +\infty$.***

§ 3. Спектральный смысл понятия спектрального многообразия выясняют следующие „почти" обратные друг другу теоремы и следствие из них.

Пусть $\mathfrak{H}$ есть линейное многообразие, приводящее A. Если оператор $\mu I - A$ (μ — комплексное число) имеет в $\mathfrak{H}$ ограниченный обратный $R_\mu = (\mu I - A)^{-1}$, то мы назовем R_μ резольвентой A в $\mathfrak{H}$.

Теорема 2. *Если резольвента $R_\mu = (\mu I - A)^{-1}$ оператора A в инвариантном линейном многообразии $\mathfrak{H}$ регулярна в полуплоскости $\Delta(\omega + \pi, -\alpha)$, смежной с $\Delta(\omega, \alpha)$, то: 1) $\mathfrak{H}$ содержится в любом спектральном многообразии $\mathscr{E}_A(\omega, \alpha + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$; 2) при $x \in \mathfrak{H}$, $y \in \mathscr{E}$ имеет место соотношение****

$$(e^{\lambda A}x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda\mu}(R_\mu x, y)\, d\mu,$$

где прямая Γ' лежит в полуплоскости $\Delta(\omega + \pi, -\alpha)$ (следовательно, параллельна граничной прямой Γ полуплоскости $\Delta(\omega, \alpha)$) и направлена в ту же сторону, что и Γ, а λ принадлежит положительной части прямой Π, т. е. $\lambda = \rho e^{i\omega}$, $0 < \rho < +\infty$.

Теорема 3. *Пусть μ принадлежит полуплоскости $\Delta(\omega + \pi, -\alpha)$, смежной с $\Delta(\omega, \alpha)$. Пусть $x \in \mathscr{E}_A(\omega, \alpha)$. Тогда: 1) существует элемент $x_\mu = R'_\mu x \in \mathscr{E}_A(\omega, \alpha)$ такой, что при всех $y \in \mathscr{E}$ будет*

$$(x_\mu, y) = (R'_\mu x, y) = \int_{+\Pi} e^{-\lambda\mu}(e^{\lambda A}x, y)\, d\lambda, \tag{1}$$

*где $+\Pi$ указывает на интегрирование по положительной части прямой Π; преобразование R'_μ, ставящее элементу $x \in \mathscr{E}_A(\omega, \alpha)$ в соответствие элемент x_μ, определяемый скалярным произведением (1), является аддитивным и однородным (но, может быть, неограниченным — в силу возможной незамкнутости спектрального многообразия $\mathscr{E}_A(\omega, \alpha)$). 2) Обозначая через δ расстояние от μ до Γ, будем иметь*****

$$\| R'_\mu x \| \leqslant \frac{C(A, \omega, \alpha, x)}{\delta},$$

где положительная постоянная $C(A, \omega, \alpha, x)$ зависит от A, ω, α, x и не зависит от $\mu \in \Delta(\omega + \pi, -\alpha)$. 3) Имеет место равенство

$$(\mu I - A) R'_\mu x = R'_\mu (\mu I - A) x = x,$$

т. е. R'_μ в $\mathscr{E}_A(\omega, \alpha)$ является „обобщенной" (т. е., может быть, неограниченной) резольвентой, существующей при $\mu \in \Delta(\omega + \pi, -\alpha)$.

Следствие. Для того чтобы в инвариантном подпространстве (= замкнутом линейном многообразии) $\mathfrak{H}$ существовала резоль-

* Всюду имеются в виду ограниченные линейные операторы.

** $|A|$ означает норму оператора A.

*** (h, g) означает скалярное произведение элементов h и g.

**** $\| h \|$ есть норма элемента h, т. е. $\| h \| = +\sqrt{(h, h)}$.

вента $R_\mu = (\mu I - A)^{-1}$, регулярная в полуплоскости $\Delta(\omega + \pi, -\alpha)$, смежной с $\Delta(\omega, \alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{H}$ принадлежало любому спектральному многообразию $\mathcal{E}_A(\omega, \alpha + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$. При этом норма R_μ имеет оценку

$$|R_\mu| \leqslant \frac{C(A, \mathfrak{H}, \omega, \alpha + \varepsilon)}{\delta - \varepsilon},$$

где δ есть расстояние от μ до граничной прямой Γ полуплоскости $\Delta(\omega, \alpha)$, ε — сколь угодно мало ($0 < \varepsilon < \delta$), а положительная постоянная $C(A, \mathfrak{H}, \omega, \alpha + \varepsilon)$ зависит от $A, \mathfrak{H}, \omega, \alpha + \varepsilon$ и не зависит от $\mu \in \Delta(\omega + \pi, -\alpha)$ и $x \in \mathfrak{H}$. Далее, функция $(R_\mu x, y)$ $(x \in \mathfrak{H}, y \in E)$ комплексного переменного μ, регулярная в $\Delta(\omega + \pi, -\alpha)$, и функция $(e^{\bar\lambda A}x, y)$ $(\bar\lambda = \rho e^{-i\omega}, 0 < \rho < +\infty)$ действительного переменного ρ связаны друг с другом взаимно обратными формулами

$$(e^{\bar\lambda A}x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\bar\lambda\mu}(R_\mu x, y)\, d\mu,$$

$$(R_\mu x, y) = \int_{+\Pi} e^{-\bar\lambda\mu}(e^{\bar\lambda A}x, y)\, d\bar\lambda.$$

§ 4. Пусть $\sigma_1 < \sigma_2$, $\tau_1 < \tau_2$ суть действительные числа, $J_1(\sigma)$ $(\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2)$ и $J_2(\tau)$ $(\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2)$ суть два семейства идемпотентных* операторов, ограниченных в своей совокупности, перестановочных между собой, обладающих свойством монотонности, т. е. $J_k(\alpha)J_k(\beta) = J_k(\alpha)$ при $\alpha \leqslant \beta$ $(k = 1, 2)$, причем $J_1(\sigma_1) = J_2(\tau_1) = 0$, $J_1(\sigma_2) = J_2(\tau_2) = I$, и, наконец, удовлетворяющих тому условию, что квадратичные формы $(J_1(\sigma)x, x)$ и $(J_2(\tau)x, x)$ суть измеримые функции σ $(\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2)$, соответственно τ $(\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2)$, при любом $x \in \mathcal{E}$.

Пусть $F(\sigma, \tau)$ есть (комплексная) функция, имеющая ограниченные и равные вторые частные производные** $F''_{12} = F''_{21}$ в прямоугольнике $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Тогда билинейная форма

$$B(x, y) = F(\sigma_2, \tau_2)\cdot(x, y) - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} F'_1(\sigma, \tau_2)(J_1(\sigma)x, y)\, d\sigma -$$

$$- \int_{\tau_1}^{\tau_2} F'_2(\sigma_2, \tau)(J_2(\tau)x, y)\, d\tau + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} F''_{12}(\sigma, \tau)(J_1(\sigma)J_2(\tau)x, y)\, d\sigma d\tau$$

определяет некоторый ограниченный линейный оператор B: $(Bx, y) = B(x, y)$. В частности, при $F(\sigma, \tau) \equiv \sigma + i\tau$ получим оператор N, который мы назовем **обобщенным нормальным** оператором; если все идемпотентные операторы $J_k(\alpha)$ являются операторами ортогонального проектирования, то билинейная форма $B(x, y)$ может быть записана в виде интеграла Стильтьеса

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\sigma, \tau)\, d_\sigma d_\tau (J_1(\sigma)J_2(\tau)x, y)$$

и N становится обычным нормальным оператором, т. е. $NN^* = N^*N$.

* Оператор J называется идемпотентным, если $J^2 = J$.

** $F'_1 = \dfrac{\partial F}{\partial \sigma}$, $F'_2 = \dfrac{\partial F}{\partial \tau}$, $F''_{12} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial\sigma\partial\tau}$, $F''_{21} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial\sigma}$.

§ 5. Оператор E назовем обобщенным нильпотентным, если его спектральные многообразия $\mathscr{E}_E(\omega, \alpha)$ равны всему $\mathscr{E}$ при любом ω и любом $\alpha > 0$*.

§ 6. Оператор вида $N + E$, где N — обобщенный нормальный, E — обобщенный нильпотентный, N и E перестановочны, назовем матрицеподобным.

Идемпотентный оператор J вполне определяется его неподвижным пространством $\mathfrak{H} = \{x, Jx = x\}$ и неподвижным пространством сопряженного оператора $G = \{x, J^*x = x\}$. Связь J с $\mathfrak{H}$ и G мы обозначим символом $J = \mathfrak{H} \times G$ (следовательно: $J^* = G \times \mathfrak{H}$).

Основная теорема. *Для того чтобы оператор A был матрицеподобным, достаточны следующие условия:* 1) *существуют идемпотентные операторы***

$$J_1(\alpha) = \overline{\mathscr{E}_A(0, \alpha)} \times \overline{\mathscr{E}_{A^*}(0, \alpha)}, \quad J_2(\alpha) = \overline{\mathscr{E}_A\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)} \times \overline{\mathscr{E}_{A^*}\left(-\frac{\pi}{2}, \alpha\right)}, \quad |\alpha| \leqslant |A|, \tag{2}$$

нормы которых равномерно ограничены, а квадратичные формы $J_k(\alpha)x, x)$ $(k = 1, 2)$ суть измеримые функции α $(-|A| \leqslant \alpha \leqslant |A|)$ при любом $x \in \mathscr{E}$. 2) *Имеют место включения****

$$\overline{\mathscr{E}_A(\omega, \alpha)} \subset \mathscr{E}_A(\omega, \alpha + \varepsilon), \tag{3}$$

$$\mathscr{E} \ominus \mathscr{E}_{A^*}(-\omega, \alpha) \subset \mathscr{E}_A(\omega + \pi, -\alpha + \varepsilon) \tag{4}$$

при $\omega = 0, \pi/2$, любом α $(|\alpha| \leqslant |A|)$ и любом $\varepsilon > 0$. При этом обобщенная нормальная часть N оператора A будет получаться из идемпотентных операторов (2) *так, как описано в* § 4.

Что касается необходимости этих условий, то автор смог доказать (3) лишь для того случая, когда N является обычным нормальным оператором (т. е. $NN^* = N^*N$).

Поступило
14 VII 1947

---

* Это определение эквивалентно определению И. М. Гельфанда: $\lambda^n |E^n| \to 0$ при $n \to \infty$ и любом λ.

** $\overline{\mathfrak{A}}$ означает замыкание $\mathfrak{A}$.

*** $\mathscr{E} \ominus \mathfrak{A}$ означает ортогональное дополнение к $\mathfrak{A}$ в $\mathscr{E}$.