Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

В. ТАРТАКОВСКИЙ

О ПРОЦЕССЕ ПОГАШЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 VII 1947)

Пусть группа $\mathfrak{G}$ задана порождающими элементами $S_1, S_2, \ldots, S_m$:

$$\mathfrak{G} = \{ S_1, \ldots, S_m \}, \tag{1}$$

соотношениями:

$$S_1^{n_1} = 1, \ldots, S_m^{n_m} = 1, \tag{2}$$

где n_i — целые положительные числа, и соотношениями*:

$$f_1(S) = 1, \ldots, f_k(S) = 1. \tag{3}$$

Соотношения (3) мы будем называть основными соотношениями. Их левые части, т. е. слова $f_1(S), \ldots, f_k(S)$, мы будем называть базисными словами, а совокупность их — базисом группы $\mathfrak{G}$. Числа n_i мы будем называть формальными порядками порождающих элементов S_i (не просто порядками, потому что истинные порядки порождающих элементов S_i могут оказаться равными $n_i' < n_i$ для некоторых или всех i вследствие основных соотношений (3)). Сами соотношения (2) мы будем называть соотношениями формального порядка.

Для записи идентичности двух слов, составленных из порождающих (1), мы будем употреблять знак $\approx$. Два слова, могущие быть преобразованы друг в друга при помощи тождественных преобразований и соотношений (2), мы будем называть свободно равными и будем записывать свободное равенство знаком $\equiv$. Знак $=$ между двумя словами будет означать, что эти слова равны как элементы группы $\mathfrak{G}$. Каждому порядку мы будем сопоставлять область $V(n)$ значений x, приведенных по модулю R и таких, что $-n/2 \leqslant x < n/2$. Множество, получающееся при изъятии из множества $V(n)$ числа нуль, мы будем обозначать $V'(n)$.

Мы будем называть слово

$$S_{i_1}^{\alpha_1} \ldots S_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \tag{4}$$

сокращенным словом группы $\mathfrak{G}$ при выполнении следующих условий. При $\nu > 0$ показатели α_p в (4) должны принадлежать $V'(n_{i_p})$ и смежные степени в (4) должны иметь различные основания, т. е. $i_p \neq i_{p+1}$. Кроме того, к числу сокращенных слов мы относим слово (4), когда $\nu = 0$; такое слово мы называем пустым словом, считаем равным единице и изображаем знаком единицы: 1. Число ν мы называем приведенной длиной сокращенного слова (4), что в знаках выражается так: $l(S_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, S_{i_\nu}^{\alpha_\nu}) = \nu$.

---

* Символы $f(S)$, $\varphi(S)$, $\psi(S)$ и т. п. здесь и в дальнейшем обозначают слова, составленные из производящих элементов $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Произведение сокращенных слов $S_{i_1}^{\alpha_1} \dots S_{i_\mu}^{\alpha_\mu}$ и $S_{j_1}^{\beta_1} \dots S_{j_\lambda}^{\beta_\lambda}$ мы называем зацепленным, если $i_\mu = j_1$, и незацепленным, если $i_\mu \neq j_1$. Если нужно отметить незацепленность произведения, мы будем ставить жирную точку между сомножителями: $S_{i_1}^{\alpha_1} \dots S_{i_\mu}^{\alpha_\mu} \boldsymbol{\cdot} S_{j_1}^{\beta_1} \dots S_{j_\nu}^{\beta_\nu}$.

Множество всех сокращенных слов группы $\mathfrak{G}$ обозначим $\mathfrak{W}(\mathfrak{G})$. Для двух различных сокращенных слов $W_1(S)$ и $W_2(S)$ мы укажем правило, согласно которому одно из этих слов (например $W_1(S)$) старше другого или, что то же, это другое слово младше первого, что в знаках выражается так: $W_1(S) > W_2(S)$ или $W_2(S) < W_1(S)$.

Правило это для сокращенных слов таково: 1) $S_\lambda > S_\mu$, если $\lambda < \mu$; 2) $S_\lambda^p > S_\mu^q$ при $\lambda \neq \mu$, если $\lambda < \mu$; при $\lambda = \mu$, если $|p| > |q|$; при $\lambda = \mu$ и $|p| = |q|$, если $p > 0$; 3) $S_{i_1}^{\alpha_1} \dots S_{i_\rho}^{\alpha_\rho} > S_{j_1}^{\beta_1} \dots S_{j_\sigma}^{\beta_\sigma}$, если $\rho > \sigma$; при $\rho = \sigma$ и $i_1 = j_1, \dots, i_\varkappa = j_\varkappa$, $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\varkappa = \beta_\varkappa$, а $i_{\varkappa+1} \neq j_{\varkappa+1}$, или $i_{\varkappa+1} = j_{\varkappa+1}$, но $\alpha_{\varkappa+1} \neq \beta_{\varkappa+1}$ ($\varkappa = 0, 1, \dots, \rho - 1$), если $S_{i_{\varkappa+1}}^{\alpha_{\varkappa+1}} > S_{j_{\varkappa+1}}^{\beta_{\varkappa+1}}$.

Свойство старшинства, очевидно, транзитивно, т. е. из $W_1(S) > W_2(S)$ и $W_2(S) > W_3(S)$ следует, что $W_1(S) > W_3(S)$. Очевидно, что всякая цепочка убывающих сокращенных слов конечна. Относительное старшинство двух неравных свободно друг другу произвольных слов устанавливается по относительному старшинству их сокращений.

Слова, которые, как элементы группы $\mathfrak{G}$, равны 1, мы будем называть словами Дикка. При рассмотрении слов Дикка полезно бывает писать слова по кругу, т. е. считать, что степенной множитель $S_{i_\nu}^{\alpha_\nu}$ в слове (4) не является последним множителем, а предшествует степени $S_{i_1}^{\alpha_1}$. Такого рода слово мы будем называть циклическим словом, или циклом и иногда обозначать цикличность слова заключением символа слова в вертикальные черточки:

$$\left| S_{i_1}^{\alpha_1} \dots S_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \right| \approx \left| S_{i_k}^{\alpha_k} \dots S_{i_\nu}^{\alpha_\nu} S_{i_1}^{\alpha_1} \dots S_{i_{k-1}}^{\alpha_{k-1}} \right| \quad (k = 1, 2, \dots, \nu). \tag{5}$$

Различные виды равенств: „идентичность“ „свободное равенство“ и „равенство в группе $\mathfrak{G}$“ имеют для циклических слов смысл, аналогичный тому, который они имеют для слов линейных, и для обозначения их мы будем употреблять соответственно те же символы: $\approx, \equiv, =$.

Будем называть областью погашения группы $\mathfrak{G}$ множество $\pi(\mathfrak{G})$, составленное из всех таких сокращенных слов $\varphi(S)$, которые, как элементы группы $\mathfrak{G}$, равны какому-либо младшему, чем $\varphi(S)$, сокращенному слову $\psi(S)$, и только из таких слов.

Мы будем называть расщеплением линейного слова (4) образование из него двух слов вида: $S_{i_1}^{\alpha_1} \dots S_{i_\lambda}^{\alpha_\lambda}$ и $S_{i_{\lambda+1}}^{\alpha_{\lambda+1}} \dots S_{i_\nu}^{\alpha_\nu}$ (незацепленное расщепление) или вида: $S_{i_1}^{\alpha_1} \dots S_{i_{\lambda-1}}^{\alpha_{\lambda-1}} S_{i_\lambda}^{\beta}$ и $S_{i_\lambda}^{\gamma} S_{i_{\lambda+1}}^{\alpha_{\lambda+1}} \dots S_{i_\nu}^{\alpha_\nu}$, где $\beta \in V'(n_{i_\lambda})$, $\gamma \in V'(n_{i_\lambda})$, $\beta + \gamma \equiv \alpha_\lambda (\mathrm{mod}\, n_{i_\lambda})$ (незацепленное расщепление). Полученные слова мы будем называть, соответственно, левым и правым интервалом (в случае незацепленного расщепления можно называть их отрезками) слова (4).

Аналогично определяется расщепление циклического слова, преобразующее циклическое слово в линейное. Интервал этого линейного слова мы будем называть дугой исходного циклического слова, а обратный переход от этого линейного слова к циклическому мы будем называть сверткой линейного слова в цикл. Свертку линейного слова Дикка мы будем называть циклическим словом Дикка. Множество сокращенных слов вида $x \boldsymbol{\cdot} R \boldsymbol{\cdot} v$ (где x, R, v — сокращенные слова, а точки между ними означают, что и произведение незацепленно) будет называться лучом с ядром R, началом x и концом v; слова x и v связаны только условием незацепленности умножения, в остальном же они произвольны; в частности, они могут быть и пустыми словами. Если все слова луча лежат в $\pi(\mathfrak{G})$, то такой луч мы будем называть лучом погашения.

Будем называть формальным обращением и обозначать это показателем $\simeq 1$ операцию над словом, определяемую равенством:

$$(S_{i_1}^{\alpha_1} \ldots S_{i_\nu}^{\alpha_\nu})^{\simeq 1} \approx S_{i_\nu}^{\alpha'_\nu} \ldots S_{i_1}^{\alpha'_1},$$

где $\alpha'_p \equiv -\alpha_p \pmod{n_{i_p}}$ и лежит в $V'(n_{i_p})$ $(p = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Пусть сокращенное линейное слово Дикка $R(S)$ расщеплено на $R_1(S)$ и $R_2(S)$. Тогда $R_1(S) = R_2(S)^{\simeq 1}$. Если при этом $R_1(S) > R_2(S)^{\simeq 1}$, то оказывается, что луч $x \cdot R_1(S) \cdot v$ есть луч погашения, который мы будем называть левым лучом погашения линейного слова Дикка $R(S)$. Множество всех левых лучей погашения слова Дикка $R(S)$ мы будем называть его левым пучком погашения. Если $|R(S)|$ — циклическое сокращенное слово Дикка, то левым лучом и левым пучком погашения мы будем называть левый луч и, соответственно, левый пучок погашения любого линейного слова Дикка, получающегося из $|R(S)|$ расщеплением. Теоретико-множественная сумма всех сокращенных слов, составляющих все левые лучи $|R(S)|$, мы будем называть звездой погашения слова $|R(S)|$. Звездой погашения сокращенного линейного слова Дикка мы будем называть звезду погашения циклического слова, получающегося сверткой данного линейного с последующим сокращением.

Мы называем композицией двух циклов $|A(S)|$ и $|B(S)|$ операцию, состоящую из: 1) расщепления $|A(S)|$ и $|B(S)|$ в линейные слова; 2) перемножения этих линейных слов и 3) свертки полученного произведения. Результат композиции назовем продуктом, а циклы $|A(S)|$ и $|B(S)|$ — факторами продукта или композиции. Знак композиции таков: $*$. Компонировать можно много факторов: $|A_1(S)|, \ldots, |A_q(S)|$, компонируя последовательно каждый раз по два фактора. Совокупность: $[|A_1(S)|, \ldots, |A_q(S)|]$ всех факторов будем называть базисом композиции. Можно определить и композицию линейных слов путем предварительной свертки линейных факторов и расщепления конечного продукта.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что каждый из порождающих элементов (1) группы $\mathfrak{G}$ входит хоть в одно из основных соотношений (3). Так как мы не предполагаем базисные слова (3) сокращенными, то это не составляет ограничения на группу $\mathfrak{G}$. Можно доказать, что всякое циклическое или линейное сокращенное слово Дикка $R(S)$ может быть получено преобразованием, при помощи тождественных преобразований и соотношений (2), продукта базисных слов и их обращений:

$$R(S) \equiv [\ldots[f_{i_1}^{\varepsilon_1}(S) * f_{i_2}^{\varepsilon_2}(S)] * \ldots * f_{i_{\mu-1}}^{\varepsilon_{\mu-1}}(S)] * f_{i_\mu}^{\varepsilon_\mu}(S)], \text{ где } \varepsilon_i = \pm 1. \quad (6)$$

Пусть $A_1(S), \ldots, A_q(S)$ — система линейных или циклических слов Дикка. Составим всевозможные базисы: $[A_{i_1}(S), \ldots, A_{i_r}(S)]$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant q$ и $r = 1, 2, \ldots, q$.

Сумму звезд погашения всех продуктов, которые можно построить на всех этих базисах, назовем зоной погашения базиса $[A_1(S), \ldots, A_q(S)]$ и обозначим $Z[A_1(S), \ldots, A_q(S)]$.

Первая основная теорема теории погашения. *Зоны погашения базисов* $[A_1(S), \ldots, A_q(S)]$ *и* $[B_1(S), \ldots, B_q(S)]$ *совпадают, если* $A_i(S)$ *и* $B_i(S)$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ *суть слова Дикка (все линейные или все циклические) и при этом*

$$A_i(S) \equiv B_i(S) \quad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Пусть циклы $A(S)$ и $A'(S)$ таковы, что их можно расщепить в таких точках, что произведение полученных таким образом линейных слов $\bar{A}(S)$ и $\bar{A}'(S)$ свободно равно 1, т. е. $\bar{A}(S)\bar{A}'(S) \equiv 1$. Тогда мы будем говорить, что линейные слова $\bar{A}(S)$ и $\bar{A}'(S)$ (и циклы $A(S)$ и $A'(S)$) свободно обратны, а такие точки расщепления суть соответственные точки циклов $A(S)$ и $A'(S)$. Мы будем говорить, что композиция сложна по паре свободно обратных циклов $A(S)$ и $A'(S)$, если $A(S)$ и $A'(S)$ суть факторы этой композиции и часть полученного этой композицией продукта, отделяющая некоторую дугу M фактора $A(S)$ от некоторой дуги M' фактора $A'(S)$ и ограниченная соответственными точками этих факторов, есть слово, свободно равное единице. Не сложную композицию мы будем называть простой. Простым словом Дикка мы будем называть сокращенное слово Дикка, которое свободно равно некоторому продукту факторов вида $f_{ki}^{\pm 1}(S)$, полученному простой их композицией, и только такие слова.

Вторая основная теорема теории погашения. *Область погашения* $\pi(\mathfrak{G})$ *группы* $\mathfrak{G}$ *есть сумма звезд погашения всех простых слов Дикка этой группы.*

Научно-исследовательский институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
16 VII 1947