Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

Е. Я. РЕМЕЗ

ОЦЕНКИ БЫСТРОТЫ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ПОЛИА—ДЖЕКСОНА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛИНОМОВ ПРИ ДОБАВОЧНЫХ СТРУКТУРНЫХ УСЛОВИЯХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 VI 1947)

Как в нашем предыдущем сообщении (1), будем и здесь, для конкретности, исходить из рассмотрения системы каких-нибудь $n+1$ действительных функций $v_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$*, предполагаемых непрерывными на сегменте $[a, b]$ длины $b-a=l$ и линейно независимыми на нем. В качестве допустимых обобщенных полиномов имеем $\Phi(x)=v_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i v_i(x)$. Обозначая через $\Phi_m(x)$ $(m>1)$ и $\Phi_0(x)$, соответственно, полиномы наименьшего среднего степенного и равномерного уклонения от нуля на $[a, b]$ и полагая, при сохранении прочих основных обозначений предыдущего сообщения,

$$\delta_0[\Phi_0]=\rho, \quad \delta_0[\Phi_m]-\rho=2\alpha_m\rho=2\alpha\rho, \tag{1}$$

мы, в силу теоремы Джексона и Полиа, имеем $\alpha_m \to 0$ при $m\to\infty$. Для получения каких-нибудь оценок быстроты сходимости оказывается необходимым введение для функций $v_i(x)$ более конкретных структурных условий.

1°. Пусть модули непрерывности функций $v_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ подчинены (при различных, возможно, значениях коэффициента K) неравенству вида

$$\omega(\delta)\leqslant K\overline{\omega}(\delta), \tag{2}$$

где $\omega(x)$ — заданная непрерывная, возрастающая функция с невозрастающей производной или хотя бы с невозрастающим одним из производных чисел Дини (которое фактически будет здесь правой или левой производной). Эта функция может быть определена либо на целом сегменте $[0, l]$, либо на меньшем сегменте $[0, l_1]$, так как в наших рассмотрениях будут играть роль лишь свойства модуля непрерывности для сколь угодно малых значений δ. В силу известного факта равномерной относительно m $(1<m<\infty)$ ограниченности коэффициентов полинома $\Phi_m(x)$ модуль непрерывности этого полинома будет удовлетворять такому же неравенству (2) с некоторым значением коэффициента $K=k$, которое можно считать независимым от m.

* Распространение результатов на различные случаи комплексных или действительных функций одного или нескольких числовых аргументов усматривается без труда.

Обозначим через $\chi(x)$ функцию, обратную $\bar{\omega}(x)$. Из требования $\delta_m[\Phi_m] \leqslant \delta_m[\Phi_0]$ легко получить неравенство

$$\rho^m(1+\gamma^2)^m \chi\left(\frac{\rho\gamma'\alpha}{k}\right) < \rho^m l \quad (\gamma+\gamma'=2;\ \gamma, \gamma'>0). \tag{3}$$

Взяв, в частности, $\gamma=\gamma'=1$, после логарифмирования приходим к неравенству вида

$$m(1+\eta) < \frac{\log\left[1:\chi\left(\frac{\rho\alpha}{k}\right)\right]}{\alpha} \quad (\eta=\eta_m\to 0 \text{ при } m\to\infty). \tag{4}$$

Рассмотрим ближе уравнение

$$M=\frac{\log[1:\chi(A)]}{A}. \tag{5}$$

Легко видеть, что при

$$M>0, \frac{\log(1:l_1)}{\bar{\omega}(l_1)} \tag{6}$$

оно дает для A единственное значение, являющееся вполне определенной функцией от M:

$$A=\varphi(M) \quad (\lim_{M\to+\infty}\varphi(M)=0). \tag{7}$$

Непосредственно из (5) усматривается справедливость соотношения

$$\varphi(pM)=p^{-\theta}\varphi(M) \quad (0<\theta=\theta(M,p)<1) \tag{8}$$

для любого $p>0$, не выводящего аргумента (pM) за пределы области (6) допустимых для M значений. Оно означает, что *при любом (допустимом) изменении аргумента M функция $\varphi(M)$ изменяется в одинаковом направлении с величиной $1:M$, но всегда медленнее, в относительном измерении, чем эта последняя.*

Возвращаясь к соотношению (4) для величины $\alpha=\alpha_m$, точно определяемой равенством (1), пусть $\bar{\alpha}=\Psi(m)$ будет решение уравнения

$$m(1+\eta)=\frac{\log\left[1:\chi\left(\frac{\rho\bar{\alpha}}{k}\right)\right]}{\bar{\alpha}}, \quad \text{или} \quad \frac{k}{\rho}m(1+\eta)=\frac{\log\left[1:\chi\left(\frac{\rho\bar{\alpha}}{k}\right)\right]}{\frac{\rho\bar{\alpha}}{k}}. \tag{9}$$

Легко понять, что $\alpha<\bar{\alpha}$.

Сопоставляя (9) с (5), (7) и дважды учитывая (8), найдем:

$$\bar{\alpha}=\Psi(m)=\frac{k}{\rho}\varphi\left[\frac{k}{\rho}m(1+\eta)\right]\sim\frac{k}{\rho}\varphi\left(\frac{k}{\rho}m\right)=\left(\frac{k}{\rho}\right)^{1-\theta'}\varphi(m). \tag{10}$$

Оценка порядка малости величины $\alpha=\alpha_m$ (1):

$$\alpha=O[\varphi(m)], \tag{11}$$

устанавливаемая найденным асимптотическим равенством (10), не может быть улучшена в общем случае функций $v_i(x)$, принадлежащих к данному классу (2).

Это следует из того факта, что порядок малости величины α (1) оказывается точно совпадающим с порядком малости $\varphi(m)$, например, в случае полиномов

$$\Phi(x) = f(x) - c \quad (v_0(x) \equiv f(x),\ v_1(x) \equiv -1), \tag{12}$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \bar{\omega}(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l_0, \\ \bar{\omega}(l_0) = \mu & \text{при } l_0 \leqslant x \leqslant 2l_0. \end{cases} \qquad (l_0 \leqslant l_1)^* . \tag{13}$$

Для доказательства последнего утверждения мы при исследовании значения $c = c_{m+1}$ в Φ_{m+1} и связанного с ним числа $\alpha = \alpha_{m+1} = (c - \rho) : 2\rho = (c - {}^1/_2\mu) : \mu$ исходим из уравнения**

$$\int\limits_0^{c'} [c - f(x)]^m\, dx = \int\limits_{c'}^{2l_0} [f(x) - c]^m\, dx \quad (c' = \chi(c)) \tag{14}$$

или

$$c^m I = (\mu - c)^m l_0 (1 + \varkappa) \quad (\varkappa = \varkappa_m > 0,\ \lim_{m \to \infty} \varkappa = 0), \tag{15}$$

$$I = \int\limits_0^{c'} \left[1 - \frac{\bar{\omega}(x)}{c}\right]^m dx. \tag{16}$$

Чтобы получить сначала более грубую оценку нижней границы величины $\alpha = \alpha_{m+1}$, справедливую для любой $\bar{\omega}(x)$, удовлетворяющей указанным выше общим условиям, заметим, что в силу этих условий имеем при $0 < x < l_0$

$$\frac{\bar{\omega}(x)}{x} \geqslant \frac{\mu}{l_0}, \quad 1 - \frac{\bar{\omega}(x)}{c} < 1 - \frac{x}{l_0} = e^{-\frac{x}{l_0} : \left(1 - \vartheta \frac{x}{l_0}\right)} \quad (0 < \vartheta < 1), \tag{17}$$

откуда нетрудно получить: $I < l_0 : m$ и далее, после подстановки в (15)

$$\alpha m > {}^1/_4 \log m (1 - g) \text{ для достаточно больших } m, \tag{18}$$

разумея под $g > 0$ произвольно малое фиксированное число.

При дальнейшем осуществлении доказательства, задав какое-нибудь число $r = 4 + \delta > 4$ (где δ — произвольно малое, но фиксированное), для достаточно больших m имеем:

$$I < \int\limits_0^{\chi(rc\alpha)} dx + \int\limits_{\chi(rc\alpha)}^{c'} (1 - r\alpha)^m\, dx < \chi(rc\alpha) + c' e^{-r\alpha m} \tag{19}$$

и, после подстановки в (15), с учетом (18):

$$4\alpha\sigma m > \log(l_0 - \varepsilon') + \log[1 : \chi(rc\alpha)] \quad (\sigma \to 1,\ \varepsilon' \to 0). \tag{20}$$

Отсюда, сопоставляя с (5), (7), без труда найдем (заменяя, наконец, α_{m+1} на α_m и помня, что $r = 4 + \delta$):

$$\alpha = \alpha_m > \frac{1}{rc} \varphi\left[\frac{4}{rc}(m - 1)(1 + \varepsilon'')\right] = \psi(m, \delta) \quad (\varepsilon'' \to 0). \tag{21}$$

---

* Легко проверить, что функция $f(x)$ и полиномы $\Phi(x)$ принадлежат к классу (2), имея модуль непрерывности, точно равный $\bar{\omega}(\delta)$ при $\delta \leqslant l_0$.

** Ср. заключительную часть рассуждения в предыдущем сообщении.

Сравнивая с (10) при $k=1$ и учитывая (8), а также и то, что $c=c_m\to\rho$, убеждаемся, что для произвольно заданного $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta=\delta_\varepsilon$, $m=m_\varepsilon$ так, чтобы при $m\geqslant m_\varepsilon$ иметь

$$\psi(m,\ \delta)>(1/4-\varepsilon)\Psi(m), \tag{22}$$

чем и завершается доказательство нашего утверждения.

2°. Беря конкретные классы функций (2), соответствующие случаям: 1) $\bar\omega(\delta)=\delta^\tau$ $(0<\tau\leqslant 1)$, 2) $\bar\omega(\delta)=1:\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^s$ $(0<s<\infty)$, 3) $\bar\omega(\delta)=1:\left[\log^{(\nu)}\frac{1}{\delta}\right]^s$ $(\nu=2,\ 3,\ldots;\ 0<s<\infty)$ *, найдем соответственно:

1) $\varphi(m)\sim\frac{1}{\tau}\,\frac{\log m}{m}$, 2) $\varphi(m)=m^{-\frac{s}{s+1}}$ (точно), 3) $\varphi(m)\sim 1:[\log^{(\nu-1)}m]^s$ **.

3°. Оценка $\alpha=O\left(\frac{\log m}{m}\right)$ в общем случае не допускает уже улучшения при любом дальнейшем сужении локально-структурного класса функций $v_i(x)$, если даже допустить эти функции аналитическими регулярными. Так, например, для рациональных полиномов $\Phi(x)=x^\nu-c$ $(\nu>1,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$ оказывается $\alpha\sim\frac{1-\frac{1}{\nu}}{4}\,\frac{\log m}{m}$.

Поступило
19 VI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Ремез, ДАН, 58, № 7 (1947).

* $\log^{(i+1)}z=\log\log^{(i)}z$ $(i=1,2,\ldots)$, $\log^{(1)}z=\log z$; $\sim$ обозначает везде асимптотическое равенство при $m\to\infty$.

** При индивидуализированном рассмотрении каждого из этих классов функций между прочим, удается достигнуть дальнейшего сближения границ $\psi(m,\delta)$ и $\Psi(m)$ в (22).