Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 3

МАТЕМАТИКА

Т. А. РОЗЕТ

О ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 I 1947)

Ватсон [1] исследовал интегральные преобразования с ядром, зависящим от произведения, получив условия, при которых эти преобразования допускают обращения с ядром того же типа.

Ядро Ватсона $k(x, y)$ обладает меллиновым изображением в виде $y^{z} K(z)$, где $z=1/2+it$ и $K(1/2+it)\in L^2$ $(-\infty\leqslant t\leqslant\infty)$. При этом под меллиновым изображением функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $x^{c-1/2} f(x)\in L^2$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$, следует понимать такую функцию $F(z)=M_c\{f(x)\}$, $z=c+it$, к которой сходится в среднем в $(-\infty, \infty)$ интеграл $\int\limits_{1/a}^{a} x^{z-1} f(x)\, dx$ при $a\to\infty$ [2,3].

Здесь мы рассмотрим преобразования с ядром более общего вида, а именно, с ядром, меллиново изображение которого имеет вид $y^{\omega(z)} K(z)$, где $\omega(z)$ — функция, удовлетворяющая весьма широким условиям. Ядро этого типа может быть представлено так:

$$k(x, y)=\mathrm{l.\,i.\,m.}\int\limits_{c-ia}^{c+ia} x^{-z} y^{\omega(z)} K(z)\, dz,$$

где $\mathrm{l.\,i.\,m.}\ f(x, a)=f(x)$ означает, что

$$\lim_{a\to\infty}\int\limits_{0}^{\infty} |f(x)-f(x, a)|^2 x^{2c-1}\, dx=0.$$

Теорема 1. *Пусть $z=c+it$ и $\omega(z)=u(c, t)+iv(c, t)$, где $u(c, t)$ и $v(c, t)$ — измеримые в $(-\infty, \infty)$ функции от t, причем $u(c, t)$ удовлетворяет неравенствам:*

$$r_1-1<p_1\leqslant u(c, t)\leqslant p_2<r_2-1. \tag{1}$$

Если $K(c+it)\in L^2$ $(-\infty\leqslant t\leqslant\infty)$ и $k(x, y)=M_c^{-1}\{y^{\omega(z)} K(z)\}$, то преобразование*

$$g(x)=\int\limits_{0}^{\infty} k(x, y) f(y)\, dy \tag{2}$$

* $M_c^{-1}\{F(z)\}=f(x)$ обозначает обращение трансформации Меллина.

всякой функции $f(x)$, *удовлетворяющей при всех* $r\in(r_1, r_2)$ *условию* $x^{r-1/2}f(x)\in L^2$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$, *относит функцию* $g(x)$, *однозначно определяемую* (2) *почти везде в* $(0, \infty)$, *при этом* $x^{c-1/2}g(x)\in L^2$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$ *и*

$$G(z)=K(z)F(1+\omega(z)), \qquad (G(z)=M_c\{g(x)\}). \tag{3}$$

Доказательства этого предложения, ввиду его громоздкости, мы здесь не приводим.

Функцию $F(1+\omega(z))$ нужно понимать, как $\int\limits_0^\infty y^{\omega(z)}f(y)\,dy$ при $z=$ $=c+it$; можно показать, что при сделанных предположениях этот интеграл — ограниченная функция от t.

Соотношение, аналогичное (3), было получено А. М. Эфросом [4] для трансформации Лапласа, но при значительно менее общих условиях, недостаточных для рассмотрения обращения формулы (2).

Теорема 2. *Положим* $\omega(z)=u(c,t)+iv(c,t)$, $\Omega(\zeta)=U(r,t)+$ $+iV(r,t)$, *и пусть удовлетворяются следующие условия:*

(I) *Для* $\omega(z)$ *условия теоремы 1 справедливы при всех* $c\in(c_1, c_2)$.

(II) $U(r,t)$ *и* $V(r,t)$ — *измеримые в* $(-\infty, \infty)$ *функции от* t (r — *некоторое число из интервала* (r_1, r_2)), *причем имеют место неравенства:*

$$c_1-1<q_1\leqslant U(r,t)\leqslant q_2<c_2-1.$$

(III) $\omega(\Omega(\zeta)+1)\equiv\zeta-1$ *при* $\zeta=r+it$.

Пусть, кроме того, для всех $c\in(c_1, c_2)$ $x^{c-1/2}k(x,y)\in L^2$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$ и $M_c\{k(x,y)\}=y^{\omega(z)}K(z)$; *пусть, далее,* $\lambda>r-1$, $x^{r-\lambda-3/2}h_\lambda(x,y)\in L^2$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$ и $M_r\{x^{-1-\lambda}h_\lambda(x,y)\}=y^{\Omega(z)}\dfrac{H(z)}{1+\lambda-z}$.

Если $x^{r-1/2}f(x)\in L^2$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$ *при всех значениях* $r\in(r_1, r_2)$, $r_2>r_1>0$ *и* $g(x)$ *определена почти везде в* $(0,\infty)$ *соотношением* (2), *необходимым и достаточным условием существования почти везде в* $(0, \infty)$ *обратного соотношения*

$$f(x)=x^{-\lambda}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty h_\lambda(x,y)\,g(y)\,dy \tag{4}$$

является зависимость:

$$\int\limits_0^\infty h_\lambda(x,y)\,k_1(y,\xi)\,dy=\begin{cases}\dfrac{x^{1+\lambda}}{1+\lambda} & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2mm] \dfrac{\xi^{1+\lambda}}{1+\lambda} & \text{при}\quad x>\xi,\end{cases} \tag{5}$$

где

$$k_1(y,\xi)=\int\limits_0^\xi k(y,\eta)\,d\eta. \tag{6}$$

Необходимость условия (5) доказывается непосредственно, если положить в (2) и (4) $f(x)=1$ $(0\leqslant x\leqslant\xi)$, $f(x)=0$ $(x>\xi)$.

Для доказательства достаточности его заметим, что $k_1(y, \xi)=$ $=\int\limits_0^\infty k(y,\eta)\,\varphi(\xi,\eta)\,d\eta$, где $\varphi(\xi,\eta)=1$ $(0\leqslant\eta\leqslant\xi)$, $\varphi(\xi,\eta)=0$ $(\eta>\xi)$;

поэтому, на основании теоремы 1, $M_c\{k_1(y,\xi)\}=K(z)\frac{\xi^{1+\omega(z)}}{1+\omega(z)}$. Следовательно, на основании той же теоремы, получим:

$$M_r\left\{x^{-1-\lambda}\int_0^\infty h_\lambda(x,y)\,k_1(y,\xi)\,dy\right\}=\frac{H(z)}{1+\lambda-z}K(1+\Omega(z))\frac{\xi^z}{z}.$$

Таким образом, (5) приводит нас к уравнению:

$$H(z)\,K(1+\Omega(z))=1. \tag{7}$$

Вследствие сделанных относительно $\omega(z)$ и $\Omega(z)$ предположений, положив в (3) $z=1+\Omega(\zeta)$, $\zeta=r+it$, получим, принимая во внимание (7):

$$F(\zeta)=H(\zeta)\,G\,(1+\Omega(\zeta)). \tag{8}$$

С другой стороны, теорема 1 дает, что при всех $c\in(c_1,\ c_2)$ $x^{c-1/2}g(x)\in L^2$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$, поэтому

$$M_r\left\{x^{-1-\lambda}\int_0^\infty h_\lambda(x,y)\,g(y)\,dy\right\}=\frac{H(\zeta)}{1+\lambda-\zeta}G(1+\Omega(\zeta)). \tag{9}$$

Так как $x^{r-1/2}f(x)\in L^2$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$, нетрудно заметить, что

$$x^{r-3/2-\lambda}\int_0^x f(\xi)\,d\xi\in L^2\quad(0\leqslant x\leqslant\infty)$$

и

$$M_r\left\{x^{-1-\lambda}\int_0^x f(\xi)\,d\xi\right\}=\frac{F(\zeta)}{1+\lambda-\zeta}. \tag{10}$$

Сравнивая (9), (8) и (10), в силу единственности меллиновых изображений, заключаем:

$$\int_0^x f(\xi)\,\xi^\lambda\,d\xi=\int_0^\infty h_\lambda(x,y)\,g(y)\,dy;$$

отсюда следует утверждение теоремы.

Выбирая соответствующим образом $\omega(z)$ и $K(z)$ и пользуясь уравнением (7), можно построить некоторые новые формулы взаимно обратных преобразований. Так, например, получаем следующие пары формул с функциями Бесселя (после надлежащей замены переменных):

$$\psi(\xi)=\int_0^\xi\frac{J_1(2\sqrt{\xi(\xi-\eta)})}{\sqrt{\xi-\eta}}\varphi(\eta)\,d\eta,\qquad \frac{\varphi(\xi)}{\xi}=\int_0^\xi\frac{I_1(2\sqrt{\eta(\xi-\eta)})}{\sqrt{\xi-\eta}}\psi(\eta)\,d\eta; \tag{11}$$

$$\psi(\xi)=\int_0^\infty\frac{J_n(\sqrt{\xi(\xi+2\eta)})}{(\sqrt{\xi+2\eta})^n}\varphi(\eta)\,d\eta; \tag{12}$$

$$\varphi(\xi)=\int_0^\infty(\sqrt{\eta+2\xi})^{n-2}\left[(n-1)\sqrt{\frac{\eta}{\eta+2\xi}}\,J_{n-1}(\sqrt{\eta(\eta+2\xi)})+\right.$$

$$\left.+\xi J_n(\sqrt{\eta(\eta+2\xi)})\right]\psi(\eta)\,d\eta;$$

$$\int_0^{\xi} \psi(\eta)\, d\eta = \int_0^{\xi} J_0(a\sqrt{\xi^2-\eta^2})\, \varphi(\eta)\, d\eta;$$

$$\int_0^{\xi} \varphi(\eta)\, d\eta = \int_0^{\xi} I_0(a\sqrt{\xi^2-\eta^2})\, \psi(\eta)\, d\eta. \tag{13}$$

Во всех указанных формулах подразумевается $\xi > 0$, $\varphi(\xi) \in L^2$.

Последняя пара формул (которая, после очевидной подстановки, получается и с помощью обычной теоремы свертывания) может быть применена к решению краевых задач для телеграфного уравнения.

Поступило
27 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. N. Watson, Proc. Lond. Math. Soc., 32, 156 (1933). [2] E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1937, p. 94. [3] J. W. Busbrige, J. Lond. Math. Soc., 9, 179 (1934). [4] А. М. Эфрос, Матем. сб., 42, в. 6, 699 (1936).