Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 3

*МАТЕМАТИКА*

В. А. ЕФРЕМОВИЧ

# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 I 1947)*

Ниже комбинаторные свойства правильных многогранников, нанесенных на поверхность, исследуются при помощи накрывающих поверхностей; при этом почти неизбежно допускать соприкосновение двух граней и грани с собой по нескольким ребрам и вершинам. Рассматривается группа движений правильного многогранника, дается критерий интегральной правильности. Доказывается, что на каждой замкнутой поверхности, кроме тора и поверхности Клейна, существует лишь конечное число правильных многогранников, если не считать диедров, моноедров и им дуальных. На торе и поверхности Клейна их бесконечно много — дается полное перечисление.

1. Правильные многогранники. Локальный изоморфизм. Накрывающие. Правильным (локально) назовем многогранник с комбинаторно одинаковыми гранями и вершинами, т. е. числа углов во всех гранях ($m$) и при всех вершинах ($\mu$) постоянны, $m, \mu=1, 2, \ldots$ Вполне (интегрально) правильным назовем многогранник, допускающий автоморфизм, переводящий заданную грань в любую заданную любым заданным из $2m$ возможных способов. Два многогранника с одинаковыми $\mu$ и одинаковыми $m$ назовем локально изоморфными или принадлежащими одному локальному типу $(\mu, m)$.

Лемма. *Для двух локально изоморфных многогранников всегда существует общий накрывающий.*

2. Распределение локальных типов по характеристикам замкнутых поверхностей. Каких типов $(\mu, m)$ правильные многогранники возможны на данной замкнутой поверхности с эйлеровой характеристикой $\chi=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$? Из соотношений $\mu\alpha_0=2\alpha_1=m\alpha_2$ следует:

$$\alpha_0=\frac{2m\chi}{2(\mu+m)-\mu m}, \qquad \alpha_1=\frac{\mu m\chi}{2(\mu+m)-\mu m}, \qquad \alpha_2=\frac{2\mu\chi}{2(\mu+m)-\mu m}. \tag{1}$$

Знак знаменателя должен совпадать со знаком $\chi$, поэтому для сферы и эллиптической плоскости $M=2(\mu+m)-\mu m>0$, для тора и поверхности Клейна $M=0$, для остальных поверхностей $(\chi<0)$ $M<0$. При $\chi<0$ имеем $-M\leqslant-2\mu\chi$, $-M\leqslant-2m\chi$, $\mu\leqslant 6-6\chi$, $m\leqslant 6-6\chi$.

Рассматривая $\mu, m$ как декартовы координаты на плоскости, получим диаграмму распределения локальных типов (числа у точек — минимальные по абсолютной величине характеристики многогранников соответствующих типов). Из нее нетрудно усмотреть, что для сферы (и эллиптической плоскости) возможны лишь следующие типы $(\mu, m)$, изображенные черными точками области $M>0$: $(\mu\, 2)$, $\mu=1, \mathbf{2}, 3, \mathbf{4}, \ldots$, (3, 3), (**4**, **3**), (**5**, **3**) и двойственные им (для эллиптической плоскости читай лишь жирные цифры); для тора и поверхности Клейна — лишь три типа: (3, 6), (4, 4), (6, 3) на гиперболе $M=0$; для поверхности отрицательной характеристики $\chi$ лишь типы, отвечающие точкам зоны:

$$(\chi)\begin{cases} 2(\mu+m)-\mu m<0, & 2(\mu+m)-\mu m\geqslant 2\mu\chi, \quad \mu\leqslant 6-6\chi, \\ & 2(\mu+m)-\mu m\geqslant 2m\chi, \quad m\leqslant 6-6\chi, \end{cases}$$

т. е. также лишь конечное число типов для данного $\chi<0$.

3. Универсальный накрывающий многогранник. Локальный тип $(\mu, m)$ будем называть эллиптическим, гиперболическим или параболическим, если, соответственно, $2(\mu+m)-\mu m>0, <0$ или $=0$.

Многогранник $P$ типа $(\mu, m)$ однозначно определяет на универсальной накрывающей поверхности многогранник $\Pi=\Pi_{\mu m}$ — универсальный многогранник для типа $(\mu, m)$; его можно осуществить в виде сети метрически правильных конгруентных $m$-угольников, заполняющих: сферу — для эллиптического $(\mu, m)$, евклидову плоскость — для параболического и гиперболическую плоскость — для гиперболического. $\Pi_{\mu m}$ вполне правильный многогранник, так как над ним возможны лишь однолистные накрывающие (см. лемму).

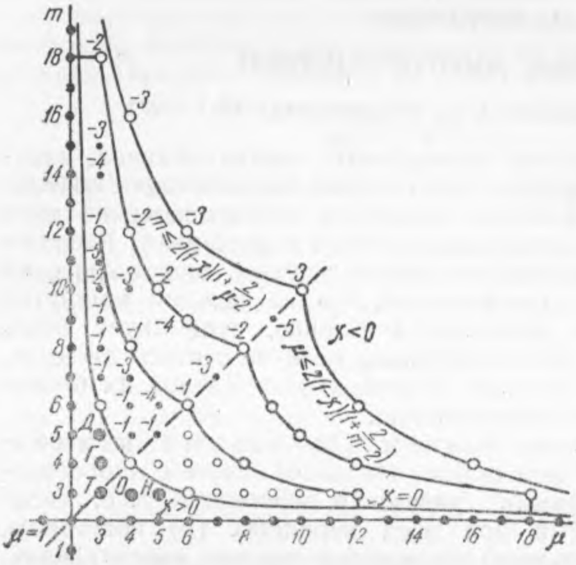


Рис. 1

Группу движений $\Pi_{\mu m}$ обозначим $\Gamma=\Gamma_{\mu m}$.

Все движения из $\Gamma$, переводящие каждую точку $\bar{a}\in\Pi$ в точку $\bar{a}'$, лежащую над той же точкой $a$ из $P$, над которой лежит и $\bar{a}$, образуют группу — фундаментальную группу $\Phi$ поверхности $P$. Она имеет то свойство, что все ее элементы, кроме 1, суть движения без неподвижных точек. Наоборот, пусть $\Phi$ — произвольная подгруппа $\Gamma$, обладающая указанным свойством; тогда, если отождествить между собой все элементы $\Pi_{\mu m}$, переходящие друг в друга при движениях из $\Phi$, возникает некоторый многогранник того же типа $(\mu, m)$, его обозначим через $\Pi/\Phi$. Таким путем можно получить любой многогранник типа $(\mu, m)$, отсюда способ перечисления правильных многогранников при помощи подгрупп $\Phi$.

Теорема 1. *Пусть $P=\Pi/\Phi$, тогда каждое $\xi\in\Gamma$, которое переставимо с $\Phi$ $(\xi\Phi=\Phi\xi)$, порождает автоморфизм $P$. Любой автоморфизм $P$ можно так получить. Группа движений многогранника $\Pi/\Phi$ изоморфна $[\Phi]/\Phi$, где $[\Phi]$ — нормализатор $\Phi$ в $\Gamma$.*

Теорема 2. $\Pi/\Phi$ *тогда и только тогда вполне правилен, когда $\Phi$ — нормальный делитель $\Gamma$. Группа движений $\Pi/\Phi$ изоморфна $\Gamma/\Phi$.*

4. Многогранники эллиптических типов. На сфере существуют многогранники всех эллиптических типов: $(2, m)$, $(\mu, 2)$, $\mu, m=1, 2, \ldots$; $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$. Это правильные сферические диедры и дуальные им; правильные сферические тетраедр, октаедр, икосаедр, куб, додекаедр — универсальные многогранники названных типов. В силу односвязности сферы на ней не может быть других (см. лемму). Все они вполне правильны.

Так как, кроме единичной, в группе движений сферы существует только одна подгруппа $\Phi$ с указанным в п. 3 свойством, именно порожденная центральной симметрией, то, кроме перечисленных многогранников, эллиптическим типам принадлежат еще только те, которые получаются из них путем отождествления центрально симметричных точек (что возможно лишь для центрально симметричных). Так приходим к правильным многогранникам эллиптической плоскости: к моноедрам, семиоктаедру, семиикосаедру и к дуальным им (все — вполне правильные).

5. Многогранники гиперболических типов. На каждой замкнутой поверхности отрицательной характеристики существует лишь конечное число правильных многогранников. Это утверждение непосредственно следует из конечности числа типов для каждого $\chi<0$ (см. п. 2) и из того, что существует лишь конечное число правильных многогранников заданного гиперболического типа и данной характеристики (числа $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ однозначно определены формулами (1)). Так, на поверхности рода 2—их около 100.

6. Многогранники параболических типов. Тип (4, 4). $\Pi_{44}$ — сеть единичных квадратов, заполняющих евклидову плоскость. Перечислим многогранники типа, задавая их фундаментальной группой, $P=\Pi/\Phi$, оси координат—по сторонам одного из квадратов.

0) и 1) Открытые ориентируемые многогранники:

0) (на евклидовой плоскости) $\Phi$ содержит лишь 1: $P=\Pi_{44}$;

1) (на поверхности бесконечного цилиндра) $\Phi$ порождена одной трансляцией $T$: $\Phi=\{T\}$. Пусть $T$ переводит точку $(x, y)$ в $(x', y')$, $x'=x+p$, $y'=y+t$, $t=0, 1, \ldots, p$, $p=1, 2, \ldots$ Полученный многогранник обозначим $\Pi/\Phi=P_{p,t}$.

2) Замкнутые ориентируемые многогранники (на торе). $\Phi$ порождена двумя трансляциями $T$ и $T_1$: $\Phi=\{T, T_1\}$. Их всегда можно выбрать так: $T\,(x'=x+p,\ \ y'=y)$, $T_1\,(x'=x+r,\ \ y'=y+q)$, $p$ и $q$ — натуральные, $r$ — вычет по модулю $p$. Обозначив $\Pi/\Phi=P_{pq,\,r}$, найдем изоморфизмы:

$$P_{pq,\,r}=P_{p'q',\,r'},\ \text{если}\ \ p=p',\ \ q=q',\ \ r+r'=0\ (\mathrm{mod}\,p)$$
$$\text{или}\ \ pq=p'q',\ q'=[p,r],\ q=[p',r'],\ rr'=qq'\ (\mathrm{mod}\,pq),$$

$[p, r]$ — наибольший делитель $p$ и $r$, $\alpha_2=pq$.

3) Открытые неориентируемые многогранники (на неограниченной поверхности Möbius'а). $\Phi$ порождена одной зеркальной трансляцией $S$: $\Phi=\{S\}$. Возможны следующие случаи: $S$ — зеркальная трансляция со сдвигом $s$ и осью, идущей

$3^1_p$) по стороне квадрата, $s=p$, например $S\,(x'=x+p,\ y'=-y)$; обозначим $\Pi/\Phi=P^1_p$;

$3^2_p$) по средней линии квадрата, $s=p$; $\Pi/\Phi=P^2_p$;

$3^3_p$) по диагонали квадрата, $s=p\sqrt{2}$; $\Pi/\Phi=P^3_p$;

$3^4_p$) через середины соседних сторон $s=\left(p-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$; $\Pi/\Phi=P^4_p$;

$$p=1, 2, \ldots$$

4) Замкнутые неориентируемые многогранники (на поверхности Клейна). $\Phi$ порождена двумя зеркальными трансляциями $S$ и $S_1$ с параллельными осями, отстоящими на $d$ друг от друга: $\Phi=\{S, S_1\}$. Возможны случаи:

$4^0_{pq}$) $S$ — вида $3^1_p$), $S_1$ — вида $3^2_p$), $d=q-\frac{1}{2}$; обозначим $\Phi/\Pi=P^0_{pq}$;

$4^1_{pq}$) обе $S$ и $S_1$ — вида $3^1_p$), $d=q$; $\Pi/\Phi=P^1_{pq}$;

$4^2_{pq}$) обе — вида $3^2_p$), $d=q$; $\Pi/\Phi=P^2_{pq}$;

$4^3_{pq}$) обе — вида $3^3_p$), $d=q\sqrt{2}/2$; $\Pi/\Phi=P^3_{pq}$;

$4^4_{pq}$) обе — вида $3^4_p$), $d=q\sqrt{2}/2$; $\Pi/\Phi=P^4_{pq}$.

$p, q=1, 2, \ldots$, $\alpha_2=2sd$.

Многогранники $\Pi$; $P_{p,t}$; $P_{pq,r}$; $P^1_p$, $P^2_p$, $P^3_p$, $P^4_p$; $P^0_{pq}$, $P^1_{pq}$, $P^2_{pq}$, $P^3_{pq}$, $P^4_{pq}$ (см. 0), 1), 2), 3), 4)) исчерпывают все возможные правильные многогранники типа (4, 4). Из них вполне правильны лишь: $\Pi$, $P_{qq,0}$ и $P_{2qq,q}$, $q=1, 2, \ldots$

7. Параболические типы. Тип (6, 3). Все многогранники этого типа можно получить из предыдущих, проводя диагонали в каждом квадрате, но проще перечислить их независимо. $\Pi_{63}$ — сеть треугольников с единичными сторонамн, заполняющих евклидову плоскость.

0) и 1) Открытые ориентируемые многогранники:

0) (на евклидовой плоскости): $\Phi=\{1\}$; $P=\Pi_{63}$;

1) (на поверхности бесконечного цилиндра) $\Phi$ порождена одной трансляцией $T$, сдвигающей плоскость на $p$ вдоль одной стороны треугольника и на $t$ вдоль другой, $p$ — натуральное, $t$ — целое, $-p<t\leqslant p$; $\Phi=\{T\}$; $\Pi/\Phi=P_{p,t}$.

2) Замкнутые ориентируемые многогранники (на торе). $\Phi$ порождена двумя трансляциями $T$ и $T_1$: $\Phi=\{T, T_1\}$, причем эти трансляции можно выбрать так: $T$ сдвигает плоскость на $p$ вдоль одной из сторон треугольника, $T_1$ сдвигает плоскость на $r$ в том же направлении и на $q$ в направлении другой стороны (т. е. под углом $+60^\circ$ к предыдущему), $p$ и $q$ — натуральные, $r$ — вычет по модулю $p$. Пусть $P_{pq,r}=\Pi/\Phi$ — полученный многогранник ($\alpha_2=2pq$), имеем изоморфизмы:

$$P_{pq,r}=P_{p'q',r'}, \quad \text{если} \quad p=p', \quad q=q', \quad r+r'+q=0 \pmod{p}.$$
$$\text{или} \quad pq=p'q',\ q'=[p,r],\ q=[p',r'],\ rr'=qq' \pmod{pq}.$$

3) Открытые неориентируемые многогранники (на неограниченной поверхности Möbius'а). $\Phi$ порождена одной зеркальной трансляцией $S$: $\Phi=\{S\}$. Возможны случаи: $S$ — зеркальная трансляция со сдвигом $s$ и осью, идущей:

$3^1_p$) по стороне треугольника сети, $s=p$; обозначим $\Pi/\Phi=P^1_p$;

$3^2_p$) по средней линии треугольника, $s=p-{}^1/_2$; $\Pi/\Phi=P^2_p$;

$3^3_p$) по высоте треугольника, $s=p\sqrt{3}$; $\Pi/\Phi=P^3_p$;

$3^4_p$) по перпендикуляру, опущенному из середины одной стороны на другую, $s=(p-{}^1/_2)\sqrt{3}$; $\Pi/\Phi=P^4_p$;

$p$ — натуральное.

4) Замкнутые неориентируемые многогранники (на поверхности Клейна). $\Phi$ порождена двумя зеркальными трансляциями $S$ и $S_1$ с параллельными осями, отстоящими друг от друга на $d$: $\Phi=\{S, S_1\}$. Возможны случаи:

$4^1_{pq}$) обе $S$ и $S_1$ вида, $3^1_p$) $d=q\sqrt{3}/2$; обозначим $\Pi/\Phi=P^1_{pq}$;

$4^2_{pq}$) обе — вида $3^2_p$), $d=q\sqrt{3}/2$; $\Pi/\Phi=P^2_{pq}$;

$4^3_{pq}$) обе — вида $3^3_p$), $d=q/2$; $\Pi/\Phi=P^3_{pq}$;

$4^4_{pq}$) обе — вида $3^4_p$), $d=q/2$; $\Pi/\Phi=P^4_{pq}$.

Многогранники $\Pi$; $P_{p,t}$; $P_{pq,r}$; $P^1_p$, $P^2_p$, $P^3_p$, $P^4_p$; $P^1_{pq}$, $P^2_{pq}$, $P^3_{pq}$, $P^4_{pq}$ (см. 0), 1), 2), 3), 4)) исчерпывают все возможные многогранники типа (6, 3); лишь $\Pi$, $P_{qq,0}$, $P_{3qq,q}$, $q=1, 2, \ldots$ вполне правильны.

Тип (3, 6) дуален предыдущему и исследован автоматически.

Поступило
29 I 1947