Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 8

МАТЕМАТИКА

А. НОРДЕН

ПОВЕРХНОСТИ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ БИАКСИАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 VII 1947)

В заметке (1) были изложены основы геометрии пространства K, т. е. такого пространства, группа движений которого изоморфна подгруппе проективных преобразований, переводящих в себя две мнимо сопряженные скрещивающиеся прямые — абсолютные прямые пространства. Абсолютная инволюция, двойные точки которой заполняют абсолютные прямые, относит всякой точке пространства x^α сопряженную точку $\bar{x}^\alpha$. Матрица абсолютной инволюции может быть пронормирована так, чтобы имело место тождество

$$\bar{\bar{x}}^\alpha = -x^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Рассмотрим две точки M_1 и M_3, не принадлежащие одной несобственной прямой, т. е. прямой, соединяющей сопряженные точки, и точки M_2 и M_4, которые сопряжены точкам M_1 и M_3, соответственно. Будем называть тетраэдр M_1, M_2, M_3, M_4 и координаты любой точки относительно этого тетраэдра канoническими.

Канонические координаты сопряженных точек связаны соотношением

$$\bar{x}^1 = -x^2, \qquad \bar{x}^2 = x^1, \qquad \bar{x}^3 = -x^4, \qquad \bar{x}^4 = x^3, \tag{2}$$

вследствие чего матрица, соответствующая любому преобразованию канонических координат, имеет вид

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \end{Vmatrix} \tag{3}$$

при условии линейной независимости ее первых трех строк. Та же матрица соответствует произвольному движению пространства K, так как его можно определить равенством канонических координат соответствующих точек по отношению к различным каноническим тетраэдрам.

Рассмотрим такое отображение пространства K на комплексную аффинную плоскость C, при котором точке M с каноническими координатами x^α соответствует точка A с аффинными координатами X, Y так, что

$$X = x^1 + ix^2, \quad Y = x^3 + ix^4. \tag{4}$$

Точки пространства K, изображаемые в плоскости C концами радиусов-векторов $\vec{R}$ и $c\vec{R}$, лежат на одной несобственной прямой при любом c, сопряжены, если c чисто мнимое, и совпадают между собою при действительном значении c. Вследствие этого рассматриваемое соответствие не будет взаимно однозначным. Плоскостям пространства K соответствуют прямые, не проходящие через начало координат.

Если в пространстве K происходит преобразование, определенное матрицей (1), то плоскость C подвергается аффинному преобразованию, оставляющему неподвижным начало и определенному матрицей

$$\begin{Vmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Таким образом, движениям пространства K соответствуют центроаффинные или радиальные преобразования плоскости C.

Рассмотрим некоторую аналитическую кривую плоскости C

$$\vec{R}=\vec{R}(w) \tag{6}$$

и предположим, что параметр w выбран так, чтобы выполнялось условие

$$X\frac{dY}{dw}-Y\frac{dX}{dw}=\text{const}, \tag{7}$$

из которого следует

$$\frac{d^2\vec{R}}{dw^2}+K\vec{R}=0. \tag{8}$$

Вследствие того, что преобразования (5) неунимодулярны, величины w и K нельзя считать совпадающими с радиальной дугой и радиальной кривизной кривой, однако они отличаются от упомянутых инвариантов только постоянным множителем ([2]).

Введем, кроме того, в рассмотрение *радиальный угловой коэффициент точки*

$$z=Y/X, \tag{9}$$

пусть для рассматриваемой кривой имеет место зависимость

$$w=f(z). \tag{10}$$

В таком случае

$$X=\sqrt{f'(z)},\quad Y=z\sqrt{f'(z)}, \tag{11}$$

и, следовательно, кривая определяется заданием зависимости (10).

Для радиальной кривизны будем иметь

$$K=\frac{1}{2}\{z,\ w\}, \tag{12}$$

где $\{z,\ w\}$ есть так называемая производная Шварца от z по w.

Всякая аналитическая кривая плоскости C соответствует некоторой поверхности пространства K. Уравнение этой поверхности можно представить в виде:

$$x^\alpha=z^\alpha\cos\theta+\bar{z}^\alpha\sin\theta, \tag{13}$$

где

$$x=\sqrt{f'(z)}=\rho e^{i\theta}, \tag{14}$$

$$z = x + iy, \tag{15}$$

$$z' = 1, \quad z^2 = 0, \quad z^3 = x, \quad z^4 = y, \tag{16}$$

так что θ есть аргумент абсциссы точки кривой, а x и y — действительная и мнимая части углового коэффициента этой точки — являются вместе с тем прямоугольными декартовыми координатами точки z^α в плоскости $x^2 = 0$, причем, согласно ([1]), эта точка лежит на одной несобственной прямой с точкой поверхности.

Так как θ есть гармоническая функция точки плоскости $x^2 = 0$, то, согласно ([1]), поверхность (13) имеет нулевую кривизну и ее внутренняя геометрия евклидова. Действительная и мнимая части $w = u + iv$ оказываются прямоугольными декартовыми координатами на рассматриваемой поверхности в любой ее регулярной области, не содержащей нулей или фокусов функции $f'(z)$.

Согласно ([1]), поверхность (13) и плоскость $x^2 = 0$ находятся в главном соответствии; оказывается, что это соответствие осуществляется функцией $w = f(z)$.

Полагая $u = u^1$, $v = u^2$, мы будем иметь

$$d\sigma^2 = K dw^2 = {}^1/_2 \{z, w\} \, dw^2 = -(p_{kl} du^k du^l + i b_{kl} du^k du^l), \tag{17}$$

где σ — центроаффинная дуга в смысле O. Mayer'а, а нулевые линии квадратичных форм правой части образуют ортогональные изотермические сети на поверхности (13), причем первая из них сопряженная, а вторая — асимптотическая.

Поступило
29 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Норден, ДАН, **55**, № 3 (1947). [2] E. Salkowski, Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1934. [3] O. Mayer et A. Myller, Ann. Sci. de l'Un. éd. Jassy, **18** (1933).