Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 3

МАТЕМАТИКА

В. ВАГНЕР

О ПОНЯТИИ ИНДИКАТРИСЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 25 I 1947)

Пусть

$$\overset{u}{\Theta}\left(\xi^a, \xi^p, \frac{\partial \xi^p}{\partial \xi^a}\right) = 0, \tag{1}$$

$$u = r+1, \dots, m(n-m), \quad a, b = 1, \dots, m, \quad p, q = m+1, \dots, n$$

будет произвольная система дифференциальных уравнений первого порядка, содержащая $n-m$ неизвестных функций $\xi^p(\xi^a)$ от m независимых переменных, где левые части представляют из себя аналитические функции.

Рассматривая n переменных ξ^α $(\alpha, \dots, \omega = 1, \dots, n)$ как координаты точки n-мерного геометрического пространства X_n и предполагая, что уравнения m-мерных интегральных поверхностей системы (1) пишутся в параметрической форме $\xi^\alpha = \xi^\alpha(t^a)$, мы заменим систему (1) системой

$$\overset{u}{F}(\xi^\alpha, \xi^\alpha_a) = 0 \quad \left(\xi^\alpha_a = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t^a}\right), \tag{2}$$

где функции $\overset{u}{F}$ удовлетворяют соотношениям

$$\overset{u}{F}(\xi^\alpha \rho^b_a \xi^\alpha_b) = (\mathrm{Det}\,|\rho^b_a|)^\lambda \overset{u}{F}(\xi^\alpha, \xi^\alpha_a).$$

Аналогично, если уравнения интегральных поверхностей системы (1) ищутся в неявном виде $\varphi^p(\xi^\alpha) = \mathrm{const}$, система (1) может быть заменена системой

$$\overset{u}{\Phi}(\xi^\alpha, \varphi^p_\beta) = 0 \quad \left(\varphi^p_\beta = \frac{\partial \varphi^p}{\partial \xi^\beta}\right), \tag{3}$$

где функции $\overset{u}{\Phi}$ удовлетворяют соотношениям

$$\overset{u}{\Phi}(\xi^\alpha, \rho^p_q \varphi^q_\beta) = (\mathrm{Det}\,|\rho^p_q|)^\mu \overset{u}{\Phi}(\xi^\alpha, \varphi^p_\beta).$$

С каждой точкой X_n мы ассоциируем два локальных пространства одного и того же числа измерений: пространство $M_{\binom{n}{m}}$ всех контравариантных m-векторов $x^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ и пространство $\dot{M}_{\binom{n}{n-m}}$ всех контравариантных $n-m$-векторов $\dot{x}^{\alpha_1 \dots \alpha_{n-m}}$. Ковариантный m-вектор $y_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ определяет гиперплоскость в $M_{\binom{n}{m}}$ и ковариантный $n-m$-вектор $\dot{y}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-m}}$ определяет гиперплоскость в $\dot{M}_{\binom{n}{n-m}}$.

Рассмотрим теперь прямые, проходящие через центр $M_{\binom{n}{m}}$, соответственно $M_{\binom{n}{n-m}}$, как точки нового пространства $Q_{\binom{n}{m}-1}$, соответственно $Q_{\binom{n}{n-m}-1}$.

$Q_{\binom{n}{m}-1}$ и $Q_{\binom{n}{n-m}-1}$ будут пространствами Клейна, фундаментальные группы которых являются подгруппами общей проективной группы в $\binom{n}{m}-1$ переменных. Отсюда следует, что все понятия проективной геометрии будут иметь смысл в геометрии $Q_{\binom{n}{m}-1}$ и $Q_{\binom{n}{n-m}-1}$.

Существенные компоненты $x^{\{\alpha_1\ldots\alpha_m\}}$, $y_{\{\beta_1\ldots\beta_m\}}$ и $x^{\{\alpha_1\ldots\alpha_{n-m}\}}$, $y_{\{\beta_1\ldots\beta_{n-m}\}}$ контравариантных и ковариантных m-векторов и $n-m$-векторов, где фигурные скобки обозначают, что рассматриваются только возрастающие последовательности индексов, являются однородными точечными и гиперплоскостными координатами в $Q_{\binom{n}{m}-1}$ и в $Q_{\binom{n}{n-m}-1}$.

Уравнения

$$y_{\beta_1\ldots\beta_{n-m}}=\frac{\rho}{m!}\,e_{\beta_1\ldots\beta_{n-m}\alpha_1\ldots\alpha_m}\,x^{\alpha_1\ldots\alpha_m}$$

$$x^{\beta_1\ldots\beta_{n-m}}=\frac{1}{m!\,\rho}\,e^{\beta_1\ldots\beta_{n-m}\alpha_1\ldots\alpha_m}\,y_{\alpha_1\ldots\alpha_m}, \tag{4}$$

где ρ — произвольный множитель, определяют инвариантное коррелятивное соответствие между $Q_{\binom{n}{m}-1}$ и $Q_{\binom{n}{n-m}-1}$.

Так как (неориентированное) m-направление в некоторой точке X_n может быть определено с помощью простого контравариантного m-вектора или с помощью простого ковариантного $n-m$-вектора, заданных с точностью до произвольного скалярного множителя, то мы можем представить его в виде точки в локальном $Q_{\binom{n}{m}-1}$ или в виде гиперплоскости в локальном $Q_{\binom{n}{n-m}-1}$, которые будут соответствовать друг другу при коррелятивном соответствии (4).

Таким образом множество всех m-направлений в некоторой точке X_n может быть представлено в виде $m(n-m)$-мерной поверхности в локальном $Q_{\binom{n}{m}-1}$, называемой поверхностью Грассмана, или в виде $m(n-m)$-параметрического семейства в локальном $Q_{\binom{n}{n-m}-1}$, называемого семейством Грассмана. Поверхность Грассмана и семейство Грассмана являются, соответственно, образами конуса Грассмана в $M_{\binom{n}{m}}$ и семейства Грассмана гиперплоскостей в $M_{\binom{n}{n-m}}$. Определяя простой контравариантный m-вектор с помощью системы m контравариантных векторов x_a^α и простой ковариантный $n-m$-вектор с помощью системы $n-m$ ковариантных векторов y_β^p, где x_a^α и y_β^p заданы с точностью до произвольной линейной комбинации, мы можем рассматривать x_a^α как некоторый вид однородных координат точки на поверхности Грассмана и y_β^p как некоторый вид однородных координат гиперплоскости, принадлежащей семейству Грассмана.

Уравнения

$$\overset{u}{F}(\xi^\alpha, x_a^\alpha)=0, \quad \overset{u}{\Phi}(\xi^\alpha, y_\beta^p)=0 \tag{5}$$

определяют, соответственно, r-мерную поверхность, лежащую на поверхности Грассмана в каждом локальном $Q_{\binom{n}{m}-1}$, и r-параметрическое семейство гиперплоскостей, принадлежащих семейству Грассмана в каждом локальном $Q_{\binom{n}{n-m}-1}$, которые будут соответствовать друг другу при коррелятивном соответствии (4). Эти r-мерную поверхность и r-параметрическое семейство гиперплоскостей будем называть, соответственно, контравариантной и ковариантной индикатрисой в данной точке X_n для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Таким образом, с геометрической точки зрения, задание системы дифференциальных уравнений в частных производных эквивалентно заданию поля ее контравариантных или ковариантных индикатрис.

Пусть

$$x_a^\alpha = B_a^\alpha(\xi^\lambda, \eta^i), \quad y_\beta^p + C_\beta^p(\xi^\lambda, \eta^i) \quad (i=1, \ldots, r) \tag{6}$$

будут параметрические уравнения, соответственно, контравариантных индикатрис, где функции B_a^α и C_β^p определены с точностью до преобразований $B_{a'}^\alpha = B_{a'}^a B_a^\alpha$ и $C_\beta^{p'} = C_p^{p'} C_\beta^p$, в которых $B_{a'}^a$ и $C_p^{p'}$ — произвольные функциии от ξ^α и η^i, удовлетворяющие условиям

$$\mathrm{Det}\,|B_{a'}^a| \neq 0, \quad \mathrm{Det}\,|C_{p'}^p| \neq 0.$$

Введем в рассмотрение аффинор

$$g_{ia}^p = \partial_i B_a^\alpha C_\alpha^p. \tag{7}$$

Можно показать, что ранг матрицы $\| g_{ia}^p \|$ с r строками и $m(n-m)$ столбцами будет равен r.

Рассмотрим l-направление $(l < m)$ в некоторой точке X_n, определенное l независимыми контравариантными векторами v_z^α $(z=1, \ldots, l)$, заданными с точностью до произвольной линейной комбинации. Множество всех m-направлений в этой точке X_n, которые содержат данное l-направление, может быть представлено в локальном $Q_{\binom{n}{m}-1}$ в виде $(m-l)$ $(n-m)$-мерной поверхности, лежащей на поверхности Грассмана, уравнения которой могут быть записаны так:

$$v_z^{[\beta} x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m]} = 0. \tag{8}$$

Эта поверхность является пересечением поверхности Грассмана в $Q_{\binom{n}{m}-1}$ с $\binom{n-l}{m-l}-1$-мерной плоскостью, которая может рассматриваться как пространство $Q_{\binom{n-l}{m-l}-1}$, в котором она будет являться поверхностью Грассмана ([1]). Рассматривая поверхность (8) в $Q_{\binom{n}{m}-1}$, мы будем называть ее $(m-l)$ $(n-m)$-мерной субповерхностью Грассмана.

Предположим, что рассматриваемое l-направление содержится в m-направлении, соответствующем точке η^i контравариантной индикатрисы. В этом случае это l-направление представляется в $Q_{\binom{n}{m}-1}$ с помощью $(m-l)$ $(n-m)$-мерной субповерхности Грассмана, проходящей через точку η^i индикатрисы. Можно показать, что необходимое и достаточное условие того, что индикатриса имеет k-мерное касание с этой субповерхностью Грассмана, т. е. что их касательные плоскости в общей точке η^i пересекаются по k-мерной плоскости, состоит в том, что система уравнений

$$g_{ia}^p v_z^a \, d\eta^i = 0, \tag{9}$$

где мы положили $v_z^a = B_a^\alpha v_z^a$, должна иметь k независимых систем решений относительно $d\eta^i$, т. е., что ранг матрицы

$$\| g_{ia}^p v_z^a \| \tag{10}$$

с r строками и $l(n-m)$ столбцами должен быть равен $r-k$.

Рассматривая индикатрисы (контравариантные и ковариантные) как локальные пространства X_r, ассоциированные с точками X_n, мы получим составное многообразие $X_{n+(r)}$. Интерпретируя $X_{n+(r)}$ как $n+r$-мерное пространство, мы видим, что каждая интегральная поверхность рассматриваемой системы дифференциальных уравнений является проекцией в X_n некоторой m-мерной интегральной поверхности системы уравнений Пфаффа в $X_{n+(r)}$

$$C_\alpha^p(\xi^\lambda, \eta^i)\, d\xi^\alpha = 0. \tag{11}$$

Каждый линейный интегральный элемент системы Пфаффа (11) может быть определен с помощью $m+r$ величины $(d\xi)^a$, $d\eta^i$, где $d\xi^\alpha = B_a^\alpha (d\xi)^a$, и поэтому каждый m-мерный плоскостной элемент в $X_{n+(r)}$ с m-мерной проекцией в X_n, все линейные элементы которого являются интегральными, может быть определен уравнениями

$$d\eta^i = \zeta_a^i (d\xi)^a. \tag{12}$$

Так как условия того, что два линейных интегральных элемента $(d_1\xi)^a$, $d_1\eta^i$ и $(d_2\xi)^a$, $d_2\eta^i$ находятся в инволюции, может быть записано так:

$$g_{ia}^p (d_1\eta^i (d_2\xi)^a - d_2\eta^i (d_1\xi)^a) + 2m_{ba}^p (d_1\xi)^b (d_2\xi)^a = 0, \tag{13}$$

где $m_{ba}^p = -B_b^\beta B_a^\alpha \partial_{[\beta} C_{\alpha]}^p$, то условия, что m-мерный плоскостной элемент (13) является интегральным, имеют вид

$$g_{i\,[b}^p \zeta_{a]}^i = m_{ba}^p. \tag{14}$$

Как известно (2), необходимым и достаточным условием того, что система уравнений Пфаффа (11) находится в инволюции, является то, что число независимых систем решений системы уравнений (14) относительно ζ_a^i равно $mr-(m-1)\sigma_1-(m-2)\sigma_2- \ldots -\sigma_{m-1}$, где числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}$ определяются из условия, что сумма $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_l$ равна рангу матрицы (10), в которой v_z^a считаются произвольными. Если это условие выполнено и система Пфаффа находится в инволюции, то числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}$ совпадают с характеристическими числами Картана $s_1, \ldots, s_{m-1}$. Таким образом, получаем теорему, дающую геометрическую интерпретацию характеристическим числам Картана:

Если система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка находится в инволюции, то ее контравариантные индикатрисы в каждой точке имеют $r-(s_1+s_2+\ldots+s_l)$-*мерное касание с общей* $(m-l)(n-m)$-*мерной субповерхностью Грассмана, проходящей через эту точку* ($l=1, 2, \ldots, m-1$).

Поступило
25 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Severi, Annali di Matematica, 24 (3), 89 (1915). [2] E. Cartan, Ann. de l'Ecole Normale, 21 (1904); E. Kähler, Einführungen in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, 1934.